Symmetrien erzeugen Muster und Zerlegungen

Stephan Rosebrock

Zusätzliches Material zum Artikel in MU

Auf dem Foto sieht man zwei im 45 Grad Winkel zueinander aufgestellte Spiegel. Sie erzeugen aus einer gestrichelten Linie, die senkrecht zu einem Quadrat verläuft, ein Quadrat.

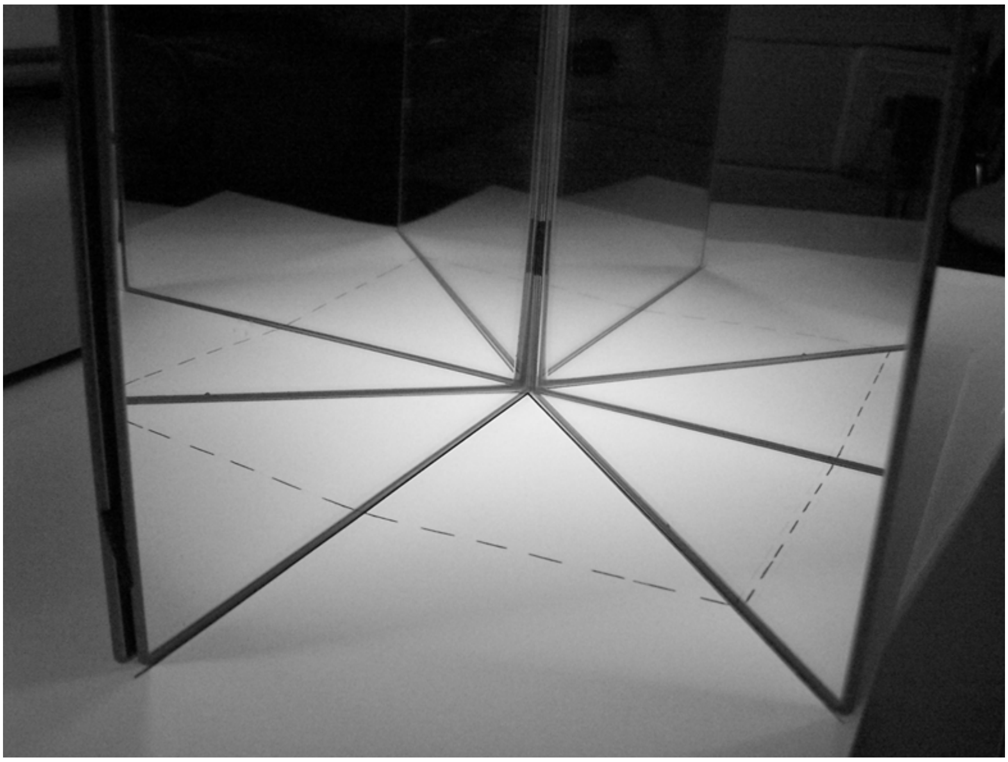

Abbildung 1: Reales Erzeugen eines Quadrats durch Spiegel

Auch Beispiel 2 aus dem Artikel kann noch auf andere Weise erzeugt werden:

Beispiel 1 *Die Spiegelung an a zusammen mit der Drehung d um den in Abbildung 2 eingezeichneten Punkt um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn erzeugt mit dem angegebenen Fundamentalbereich ein Quadrat.*

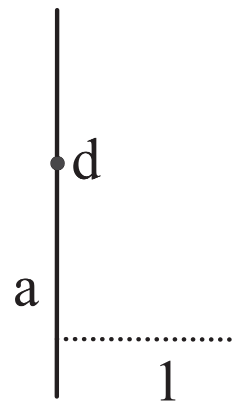

Abbildung 2: Fundamentalbereich mit Spiegelachse und Drehpunkt

Es ergibt sich das Quadrat aus Abbildung 3.

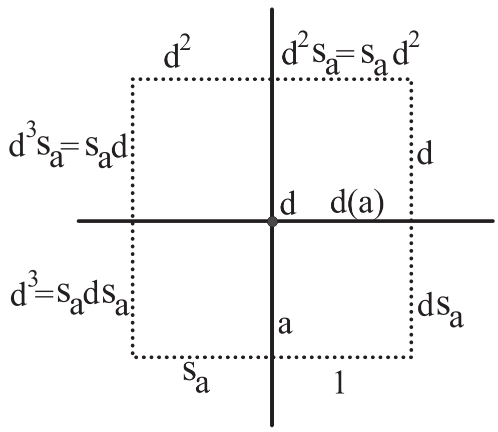

Abbildung 3: Das erzeugte Quadrat

Auch hier rechnet man nicht-kommutativ: $s_a d \neq d s_a$. Man erhält ds_a aus dem Fundamentalbereich 1 durch Spiegelung an einer Diagonalen. Weil ds_a eine Spiegelung ist, ist ds_a zwei mal hintereinander ausgeführt die Identität, d.h. $(ds_a)^2 = 1$. Das kann man anhand der Abbildung gut nachvollziehen. Außerdem gilt $d^4 = s_a^2 = 1$.

Entsprechend kann man auch das reguläre *n*-Eck aus Satz 4 des Artikels mit einer Spiegelung und einer Drehung um 360/*n* Grad erzeugen.

Es folgt ein komplexeres Beispiel:

Beispiel 2 *Gegeben seien die Spiegelungen* s_a, s_b *zusammen mit der Drehung d um den eingezeichneten Punkt um 120 Grad gegen den Uhrzeigersinn aus Abbildung 4.*

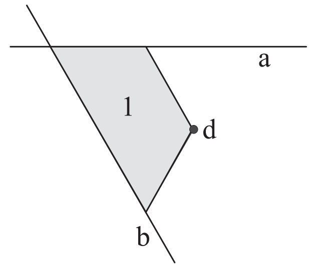

Abbildung 4: Erzeugende und Fundamentalbereich

Der Fundamentalbereich ist dabei ein gleichschenkliges Trapez mit 60 und 120 Grad Innenwinkeln.

Erzeugt wird dadurch die Zerlegung der Ebene aus Abbildung 5.

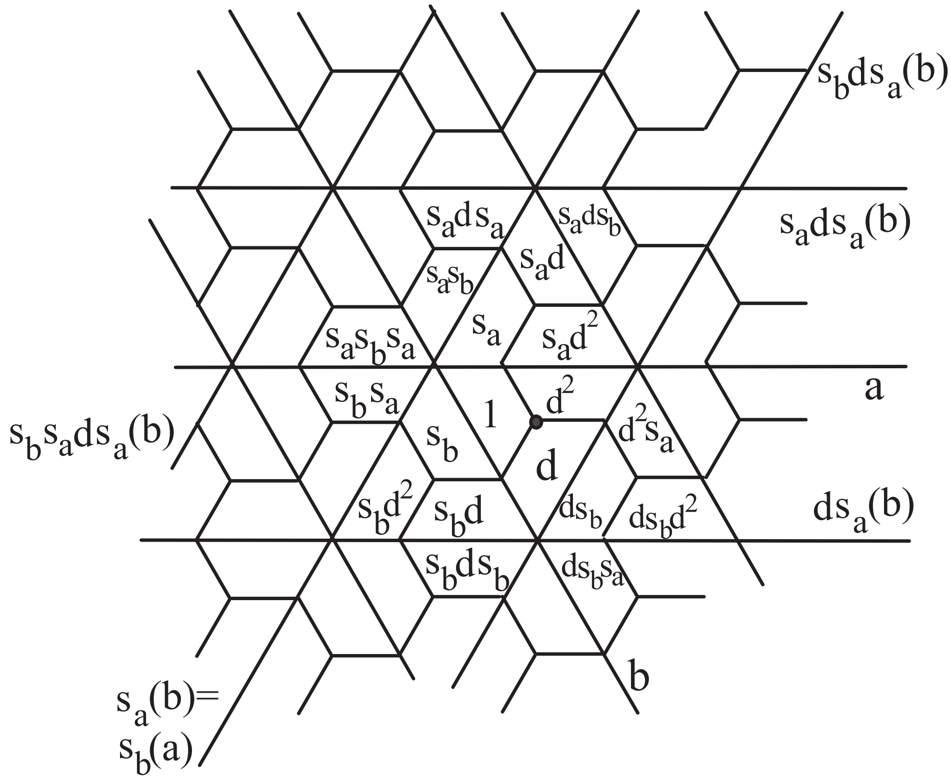

Abbildung 5: Zerlegung der Ebene

Zur besseren Lesbarkeit ist nur ein Teil der Zeichnung beschriftet. Können Sie die Beschriftung vervollständigen? Hier gelten die Gleichungen $(s_a s_b)^3 = 1$, weil $s_a s_b$ einer Drehung um 120 Grad entspricht, und $ds_a = s_b d$, wie man durch Anwendung von ds_a und $s_b d$ jeweils auf 1 in Abbildung 5 sieht. Die letzte Gleichung lässt sich, wegen $d^2 = d^{-1}$ in $s_b = ds_a d^2$ verwandeln. Wir könnten in der Zeichnung also überall s_b durch $ds_a d^2$ ersetzen. s_b ist als Erzeugende in Abbildung 4 unnötig. Es gilt außerdem $s_a^2 = s_b^2 = d^3 = 1$.

Die Zerlegung lässt Translationen zu. Wie drücken die sich durch d, s_a, s_b aus? Mit welchen anderen Erzeugendensystemen lässt sich die Zerlegung erzeugen?

Bei den Zerlegungen der Ebene gibt es einfache Beispiele und schwierige. Beispiel 8 und insbesondere Beispiel 1 aus dem Artikel wird die Schüler vor nicht allzu große Probleme stellen. Weitere einfache und schwierige Beispiele finden sich im folgenden Abschnitt.

Beim Zeichnen der Abbildungen mit einem CAD-Programm kann man den Erzeugungsprozess nachvollziehen. Es genügt, den Fundamentalbereich zu zeichnen und Kopien davon mit den entsprechenden Isometrien abzubilden. Jeder, der geschickt ein CAD-Programm für solche Abbildungen nutzt, geht intuitiv so vor.

Natürlich kann man auch mit einem DGS-Programm die Zerlegungen aus einem Fundamentalbereich mit Hilfe von Isometrien konstruieren. Das ist weniger fehleranfällig als das Arbeiten auf dem Papier und somit kann man sich mehr auf den Erzeugungsprozess konzentrieren.

Aufgaben

Aufgabe 1: Welche Figur sehen Sie, wenn Sie in Abbildung 6

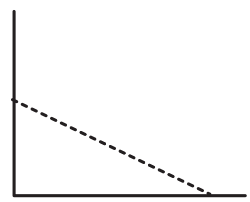

Abbildung 6: Fundamentalbereich und zwei Spiegelungen

auf die durchgezogenen Linien Spiegel stellen? Beschriften Sie die entstehende Figur und schreiben Sie Gleichungen auf.

Aufgabe 2: Erzeugen Sie das reguläre *n*-Eck aus einer Spiegelung und einer geeigneten Drehung in Verallgemeinerung von Beispiel 1. Zeichnen Sie ein Bild analog zu Abbildung 3. Welche Gleichungen gelten hier?

Aufgabe 3: Stellen Sie gedanklich 4 Spiegel zu einem Quadrat auf. Zeichnen Sie eine beliebige Figur als Fundamentalbereich in das Quadrat. Was sehen Sie, also wie reflektiert sich die Figur in den Spiegeln, wenn Sie von oben hineingucken? Zeichnen und beschriften Sie die entstehende Figur.

Aufgabe 4: Ändert man den Fundamentalbereich, lässt aber die erzeugenden Isometrien bestehen, so entstehen andere Figuren aber mit denselben Isometrien. Erzeugen Sie nach diesem Prinzip mit den Isometrien von Satz 4 aus dem Artikel einen Stern.

Aufgabe 5: Erzeugen Sie ein Bandornament, das eine Gleitspiegelung zulässt, aber keine Drehung oder Spiegelung.

Aufgabe 6: Welche Figur erzeugen Sie mit dem Parallelogramm aus Abbildung 7 als Fundamentalbereich zusammen mit 3 Punktspiegelungen an

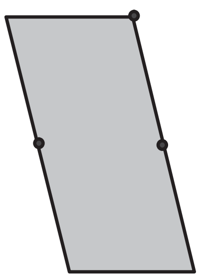

Abbildung 7: Parallelogramm als Fundamentalbereich

den eingezeichneten Punkten? Beschriften Sie die entstehende Figur. Welche Gleichungen gelten hier? Können Sie die entstehende Figur auch auf andere Weise erzeugen?

Aufgabe 7: Vorgegeben seien eine Spiegelgerade *a* und eine Drehung *d* um 90 Grad um einen Punkt mit Abstand 1 cm von *a*. Finden Sie einen passenden Fundamentalbereich, zeichnen Sie die entstehende Figur und beschriften Sie sie entsprechend.

Literatur

[1] B. Grünbaum und G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*; W. H. Freeman and Company (1987).

[2] G. Müller, E. Wittmann; *Spiegeln mit dem Spiegelbuch*; Ernst Klett Grundschulverlag, (1997).

[3] S. Rosebrock; *Geometrische Gruppentheorie – Ein Einstieg mit dem Computer*; vieweg Verlag, (2004).

[4] S. Rosebrock; *Symmetrien – einmal anders herum*; Beiträge zum Mathematikunterricht, div Verlag Franzbecker, (2004), S. 477-480.

[5] S. Rosebrock; *Aus Spiegelachsen Figuren bauen*; Mathematik-information, 42, (2005), S. 59-65.