Zum Beitrag Gawlick: Mit Symmetrien flexibel auf Figuren operieren, S. 34 – 41

Subject: Trapeze
Date: Tue, 05 Jul 2005 21:32:56 +0200
From: Jürgen Katins <katins.juergen@web.de>
To: gawlick@uni-landau.de
Hallo Herr Gawlick
Ich fürchte, ich habe Sie heute in der Vorlesung etwas verunsichert. Das möchte ich wieder gut machen, indem ich Ihnen über meine Überlegungen bezüglich Trapezen und Parallelogrammen berichte.
Sie hatten behauptet: Ein gleichschenkliges Trapez ist achsensymmetrisch. Und: Der Beweis dazu ist sehr schwierig.
Richtig war dann: Ein gleichschenkliges Trapez ist achsensymmetrisch oder ein Parallelogramm.

> Dieser Zusatz macht den Beweis noch schwieriger. Sollte man meinen. Erstaunlicherweise wird dadurch der Beweis aber einfacher. Insbesondere der Beweiszweig mit dem „achsensymmetrisch“ wird dadurch geradezu lächerlich einfach! Hier der Beweis:

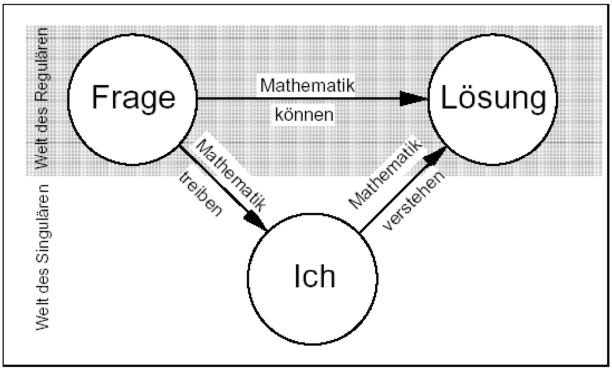
Sei (A, B, C, D) ein gleichschenkliges Trapez, dabei sollen sein: AB parallel CD sowie
$|s(AD)| = |s(BC)|$
Sei h die Mittelsenkrechte zu A und B. Dann bildet die Spiegelung an h den Punkt A auf B ab.
Für den Punkt D gibt es jetzt zwei Möglichkeiten:
1. D wird auf C abgebildet. Dann sind die Strecken $s(A'D')$ und $s(BC)$ gleich. Damit ist das Trapez achsensymmetrisch.
(Sie haben es sicherlich bemerkt: das war der lächerlich einfache Beweiszweig)
2. D wird nicht auf C abgebildet, also D' ungleich C. Sei nun g die Mittelsenkrechte von D' und C.

Da	$\mathrm{s}(BC) = \lvert \mathrm{s}(AD) \rvert$	//nach Voraussetzung
	$= \lvert \mathrm{s}((AD)') \rvert$	//Strecke und Spiegelstrecke sind gleich lang, Axiom[??]
	$= \lvert \mathrm{s}(A'D') \rvert$	//gespiegelte Strecke ist die aus den Spiegelpunkten erzeugte Strecke, Axiom[??]
	$= \lvert \mathrm{s}(BD') \rvert$	//$A' = B$ nach Konstruktion von h

deshalb liegen C und D' gleich weit von B entfernt und damit liegt B auf deren Mittelsenkrechten g.
Eine weitere Spiegelung an g lässt also $A' = B$ da wo er ist und bildet D' auf C ab. Die Hintereinanderausführung (g nach h) bildet also die Strecke $\mathrm{s}(AD)$ auf die Strecke $\mathrm{s}(BC)$ ab.
Nun gilt: DC parallel AB und h senkrecht zu AB ==> h senkrecht zu DC ==> $(DC)' = DC$
//hier ist Spiegelung an h gemeint
==> D' ist Element von DC ==> $MS(D'C)$ senkrecht zu DC <==> g ist senkrecht zu DC
sowie: h ist senkrecht zu DC und g ist senkrecht zu DC ==> h ist parallel zu g ==> $V = Sg$ nach Sh ist eine Verschiebung.
Bei einer Verschiebung werden aber Geraden auf parallele Geraden abgebildet, also sind AD und BC parallel. AB und CD sind schon nach Voraussetzung parallel, also ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm.
Ich denke, der Beweis (insbesondere natürlich der zweite Teil) war jetzt nicht so schwierig. Fehlt noch was?
Nun ja, mathematisch exakt gesehen wohl nicht aber moralisch gesehen schon. Wenn man so einen Beweis führt: A ==> B oder C und der B-Teil ist so lächerlich einfach, so sollte man anstandshalber noch zeigen, dass die Aussage B zumindest manchmal wahr ist und man nicht einen Schluss der Form A ==> (sowieso immer falsch) oder C geführt hat.
Man sollte also noch zeigen, dass es sowas wie ein achsensymmetrisches Trapez auch wirklich gibt.
Mach ich jetzt aber nicht, weil ich noch ein paar echte Übungsaufgaben lösen muss.
Schöne Grüße
Jürgen Katins

Abb. 5

In unserem Diagramm lässt sich das, was sich hier abspielte, durch die zusätzliche Position des Ichs darstellen:



Zwei Kennzeichen trägt unsere erste Begegnung.
1. Das Ich des Lernenden wurde offenbar durch meine provokative Frage aktiviert und
2. durch sein spontanes Schreiben konnte Urs dem Problem gegenüber Tritt fassen.

Abb. 6

Subject: Satz „Katins - Müller“
Date: Sat, 23 Jul 2005 17:20:21 +0200
From: Anne Mueller <xx.yy@gmx.de>
To: gawlick@uni-landau.de

Hallo Herr Gawlick,
eben bei einem Stück Kuchen habe ich mir mal den Satz von Katins und meinen Satz nochmal angeschaut und Sie haben doch nach dem Satz von „Katins - Müller“ gefragt. Mir ist ein möglicher Satz als eine Kombination von meinem Satz und Herrn Katins‘ eingefallen, der wie folgt lautet:
Satz: „Wenn ein Viereck *ABCD* punktsymmetrisch ist, dann handelt es sich um ein gleichschenkliges Trapez.“
(Auch ein „umgeklapptes Viereck“ kann ein Trapez sein, da bei einem Trapez nur zwei Seiten parallel sein müssen.)
Ich habe noch keinen Beweis dazu zu Papier gebracht, da ich Ihnen zuerst meine Idee schreiben wollte. Ich habe eben nur mal auf einem Schmierpapier ein paar Skizzen angefertigt und ausprobiert. Ich werde aber versuchen einen Beweis dazu zu führen.
Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie mir Rückmeldung darüber geben könnten, ob Sie überhaupt diesen Satz meinten.
Vielen Dank
Mit freundlichen Grüßen
Anne Müller

Abb. 10

Literatur

Elschenbroich, H.-J.(1996): Geometrie mit EUKLID. PM 5/38, S.233–237.

Gallin, P., Ruf, U. (1998): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, 2 Bände. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Lakatos, I. (1979): Beweise und Widerlegungen. Braunschweig: Vieweg.

Müller, G. N., Steinbring, H., Wittmann, E. Ch. (Hg., 2004): Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Treutlein, P. (1911): Der geometrische Anschauungsunterricht. Leipzig/Berlin: Teubner.(Nachdruck mit Einführung von J. Schönbeck: Paderborn: Schöningh 1985)

Anmerkungen

1 Die Vorlesung nach der O-Skript/A-Skript-Methode ist „aus dem Bemühen entstanden, auch in großen „Lehrveranstaltungen" aktives Lernen der Studierenden anzuregen ... Dabei wird deutlich unterschieden zwischen dem sogenannten „O-Skript" des Dozenten, das lückenhaft und skizzenartig ist, und den von den Studierenden angefertigten persönlichen „A-Skripten", in denen die Bearbeitung der gestellten Probleme unter Einbeziehung des O-Skripts in einem sauberen Text dokumentiert wird." (Müller, Steinbring, Wittmann 2004)

2 Die Darstellung ist inspiriert von den wundervollen Dialogen in Lakatos (1979). Wenn sie nicht ebenso eindrucksvoll ausfallen, liegt das an den darstellerischen Möglichkeiten des Verfassers, aber auch daran, dass echte Dialoge mit Studierenden zu Grunde liegen: ihre Ausdrucksweise ist weniger elaboriert als die der von Lakatos zitierten Mathematiker und löst sich erst allmählich von der „kurztaktigen" Rahmung des fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächs.

3 In den Worten, die Lakatos seiner Lehrer-Figur in den Mund legt: „Ich hoffe, ihr erkennt jetzt alle, dass die Beweise, selbst wenn sie nicht beweisen, auf jeden Fall immer zur Verbesserung unserer Vermutung beitragen. Die Ausnahmesperrer verbesserten sie auch, aber ihr Verbessern hatte mit ihren Beweisen nichts zu tun. Unsere Methode verbessert durch Beweisen. Diese innere Einheit zwischen der „Logik der Entdeckung" und der „Logik des Beweisens" ist der wichtigste Gesichtspunkt bei der Methode der Hilfssatzeinverleibung." (Lakatos 1979, S. 31)

4 Hier führt also eine Analyse des falschen Beweises von „Punktsymmetrische Vierecke sind Parallelogramme" zu einer konzeptionellen Verfeinerung der Aussage bzw. der Begriffsbildung – wie bei Lakatos, der in diesem Wechselspiel die Triebfeder für die Konsolidierung einer formalen Theorie sieht.In deren weiteren Aufbau macht dann auch die Monstersperre „Alle Viereck seien einfach" Sinn!