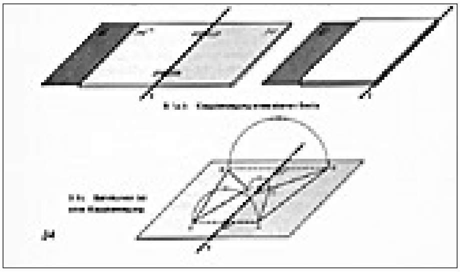

Abb. 2: Kopie der Abbildung 9.1 c „ Bahnkurven bei einer Klappbewegung“, in Faber, K.: Geometrie 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1974² , S. 34

Abb. 3: Der Thuner See von Ferdinand Hodler aus dem Jahre 1909

Das folgende Beispiel bereitet manchen Lernenden große Schwierigkeiten, da es auch nicht erzeugbare Muster enthält.

Beispiel 2.3 *Kann man einen Spiegel so auf die Figur F in* ***Abbildung 4*** *stellen, dass eine Teilfigur T von F und ihr Spiegelbild T′ zusammen die folgenden Figuren 1 bis 10 ergeben? Zeichnen Sie jeweils die Spur der spiegelnden Ebene ein.*

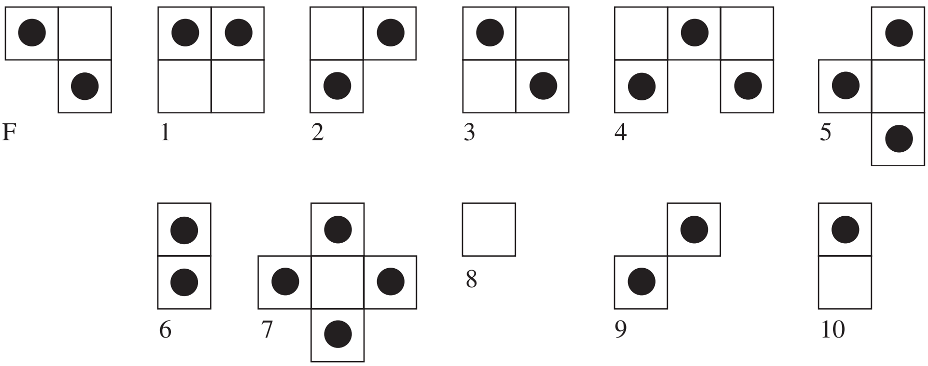

Abb. 4: Erzeugen vorgegebener Muster aus Grundmuster durch Aufstellen eines Spiegels

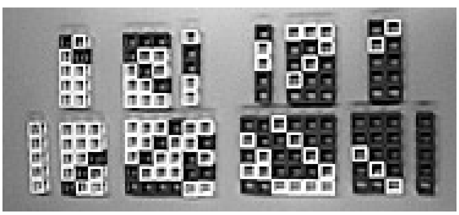

Abb. 5: Quader aus 5 Steckwürfeln

Im Beispiel 2.6 kann man die Steckwürfel durch Plättchen ersetzen, die zu Streifen aneinander zu legen sind. Die Erfahrung hat gezeigt, dass manche Lernende nicht an eine Halbdrehung eines Streifens oder an eine Spiegelung an einer Querachse denken.

Beispiel 2.8 *In Abbildung 6 ist der Bruch* $\frac{3}{8}$ *nur zweimal verschieden veranschaulicht. Erläutern Sie diese Aussage. Finden Sie in beiden Unterteilungen des Quadrats alle verschieden Veranschaulichungen der Brüche* $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$.

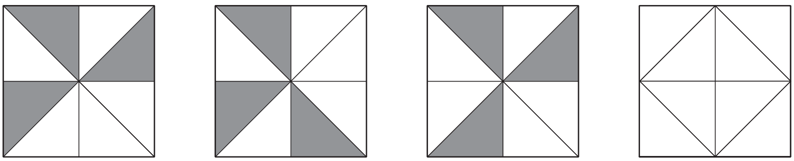

Abb. 6: Veranschaulichungen von $\frac{3}{8}$

Für Abzählprobleme wie in Beispiel 2.6 wird eine Formel entwickelt, indem man für kleine Anzahlen der Würfel $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, alle 2^n möglichen Stangen baut und dann die Stangen nach Anzahl der schwarzen Würfel systematisch anordnet (vgl. **Abb. 5**). Dabei wird etwa erkannt, dass die nicht achsen- oder ebenensymmetrischen Stangen genau zweimal, die symmetrischen dagegen nur einmal vorkommen. Legt man also die symmetrischen Stangen noch einmal hin, dann sind alle Stangen doppelt vorhanden, werden also zweimal gezählt. Somit ergibt sich die Anzahl V der verschiedenen Muster aus der Anzahl *A* aller Muster und der Anzahl *S* der symmetrischen Muster.

$$2 \cdot V = A + S \qquad (1)$$

Die symmetrischen Muster enthalten auf zur Achse bzw. Ebene symmetrischen Positionen Objekte gleicher Farbe. Somit können $\frac{n}{2}$ Objekte auf 2 Arten gefärbt werden. Bei ungeradem *n* können das Achsenfeld bzw. der von der Symmetrieebene geschnittene Würfel zusätzlich auf zwei Arten gefärbt werden. Somit folgt aus (1)

$$V = 2^{n-1} + \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}-1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (2)$$

2.4 4. Stufe: Der Begriff als strukturierbares Objekt

Die Lernenden vertiefen ihre Kenntnis der Beziehungen, die durch das Verketten von Abbildungen gestiftet werden, indem sie das Verketten geometrischer Abbildungen formalisieren. Dazu gehört, dass zuerst eine geeignete Symbolik für die Abbildungen eingeführt wird, etwa, dass der Name des Objektes, z. B. P für einen Punkt, links von dem Namen der Abbildung, z. B. Σ_a für die Spiegelung an der Geraden a, steht, und dass die Reihenfolge der Abbildungen der Schreibfolge entspricht. Für die Operation Verketten wird ein eigenes Zeichen, z. B. $\circ$, eingeführt.

$$P \xrightarrow{\Sigma_a} P' \xrightarrow{\Sigma_b} P'' :\Leftrightarrow P\, \Sigma_a \circ \Sigma_b = P'',\ \ \mathrm{K} := \Sigma_a \circ \Sigma_b$$

Wenn die Möglichkeit besteht, die Zeichen für Objekte und Abbildungen aus verschiedenen Alphabeten zu nehmen, dann erleichtert dies die Übersicht und erspart die vielfach üblichen Klammern, wie bei der Schreibweise $S_a(P)$. Ein weiterer Vorteil ist, dass der Lernende die runden Klammern nicht in einer zweiten Bedeutung neben der in $a\,(b + c)$ erlernen muss.

Genauso wie das Verketten von Funktionen in der Algebra formalisiert wird, indem die Funktionsterme ineinander eingesetzt werden, geschieht dies für geometrische Abbildungen nach einer analytischen Beschreibung durch sogenannte Abbildungsgleichungen in der Sekundarstufe I bzw. durch n-Tupel und Matrizen in der S II. Natürlich bietet sich hier der Einsatz eines Computeralgebrasystems an, wie bei den Funktionen in der Algebra. Eine umfassende Analyse eines solchen Einsatzes findet sich in (WEIGAND 1999).

Die weitergehende strukturierte Kenntnis des Abbildungsbegriffs führt zu dem Begriff der Gruppe. Wenn auch dessen Behandlung wieder aus dem Schulstoff verschwunden ist, und zur Zeit auch nicht in didaktischen Erörterungen diskutiert wird, sollten die Lernenden Einblicke in dieses mathematische Hintergrundwissen gewinnen.

Abbildungsgruppen können zwar schon auf einem enaktiven Niveau mit angemessenen Verbalisierungen und enaktiven Repräsentationen erarbeitet werden, wie die Einführung der Deckabbildungen eines Quadrates durch das Arbeiten mit Würfelnetzen in (WALTER 1970) zeigt, aber die Frage nach einer bildungsträchtigen Fortsetzung konnte in der Vergangenheit nicht überzeugend beantwortet werden.

Auf der 4. Stufe des Begriffsverständnisses ist jedenfalls zu erwarten, dass die Lernenden die Fähigkeit erwerben, Verknüpfungstafeln für die Deckabbildungen regelmäßiger Vielecke und regelmäßiger Körper aufzustellen. Dabei benutzen sie die Darstellung der Kongruenzabbildungen als Produkte von höchstens drei Geradenspiegelungen in der Ebene und als Produkte von höchstens vier Ebenenspiegelungen im Raum.

Das Aussondern von Untergruppen durch Angabe der Bedingungen kann durch Anbringen von Verzierungen an Figuren und Körpern veranschaulicht werden.

Die Kenntnis wichtiger Gruppentypen umfasst die zyklischen und Diedergruppen der Ordnungen 3, 4, 5 und 6, sowie die Gruppe W der Drehungen und die Gruppe S aller Deckabbildungen eines Würfels, und schließt die Fähigkeit ein, für Abbildungsgruppen Mengen erzeugender Elemente anzugeben.

Das strukturelle Verständnis kann sehr weit gehen. Der Begriff Konjugation kann helfen, Abbildungen zu klassifizieren oder geometrische Aussagen durch Rechnen mit Abbildungen zu beweisen, indem Aussagen über Inzidenz und Orthogonalität in Gleichungen von Abbildungen übersetzt werden (vgl (Jeger 1962), (Guggenheimer 1967), (Martin 1986)). Die Aussage

$$\Sigma_A\, \Sigma_B\, \Sigma_C\, \Sigma_D = \mathrm{Id} \Leftrightarrow [A, B, C, D] \text{ ist ein Parallelogramm}$$

beweist man, indem man die Punktspiegelungen durch Geradenspiegelungen ersetzt und den Dreispiegelungssatz anwendet.

Man kann die Erzeugbarkeit von Abbildungsgruppen aus gewissen Teilmengen untersuchen, wie etwa die Erzeugung der Gruppe der Kongruenzabbildungen im Raum aus Achsenspiegelungen in (Jeger 1968) oder die Erzeugung der affinen Gruppe durch Schrägspiegelungen in (Ziegler 1975). Solche Darstellungen haben den Nachteil, dass die vielen Fallunterscheidungen und die aufwändigen und unübersichtlichen Konstruktionen die Lernenden leicht ermüden. Der Vorteil liegt in der Beweisökonomie.

Man kann Symmetriegruppen als direkte oder semidirekte Produkte darstellen, wie die Diedergruppen in (Artmann 1977a) oder die Symmetriegruppen eines verzierten Balkens in (Rohlfs 2001). Die Darstellbarkeit der affinen Gruppe als semidirektes Produkt behandeln (Artmann 1977b) und (Holland 1982).

Der Nachweis von Isomorphismen und Homomorphismen klärt Zusammenhänge, z. B. für die Würfelgruppe wie in (Kirsch 1964).