

Vorgehen beim Anlegen des Tabellenblatts

Schritt 1: Anlegen der Spalte „Höhe h in m“

Es wird eine Spalte mit der Überschrift „Höhe h in m“ angelegt, in deren ersten Zelle die Ausgangshöhe (36 000 m) einheitenlos eingetragen wird. Eine Zelle darunter wird die um einen Meter verringerte Höhe eingetragen, wonach die Spalte durch „Herunterziehen“ bis zur Höhe $h = 0$ m befüllt wird.

Schritt 2: Anlegen der Spalte „Fallstrecke s in km“

In der angrenzenden Spalte wird die Fallstrecke s eingetragen, die der Differenz von Ausgangs- und momentaner Höhe entspricht $s = \frac{(h_0 - h)}{1000}$. Durch „Herunterziehen“ die Spalte ergänzen, bis die Fallstrecke einen Wert von 36 km erreicht.

- **Hinweis:** Da in Aufgabe 3 b ein v - s -Diagramm gezeichnet werden soll, bietet es sich aus Gründen der Übersichtlichkeit an, hier die Einheit Kilometer zu nutzen.

Schritt 3: Ermittlung des Temperaturverlaufs

Zur Modellierung der Luftdichte muss zunächst ein Höhenprofil der Temperatur erstellt werden. Hierzu verwendet man die Standardatmosphäre der ICAO, die für bestimmte Atmosphärenabschnitte von einer linearen Temperaturabnahme bzw. -zunahme mit der Höhe ausgeht und die in **Tabelle 1** angegebenen Temperaturgradienten k zugrunde legt [6].

Die Normtemperatur in Meereshöhe von 15°C wird einheitenlos in die Spalte „Temperatur in $^\circ\text{C}$ “ eingetragen. Den Wert für die Temperatur für eine Höhe von einem Meter erhält man dadurch, dass man von der darunterliegenden Zelle 0,0065 subtrahiert. Durch „Hochziehen“ wird die Zelle ko-

Höhenbereich	Temperaturgradient k
(0 ... 11) km	$-0,65 \frac{\text{K}}{100\text{m}}$ 0,65 K/100 m
(11 ... 20) km	isotherme Atmosphärenschicht, keine Temperaturänderung
(20 ... 32) km	$+1 \frac{\text{K}}{1000\text{m}}$
(32 ... 47) km	$+ \frac{2,8 \text{ K}}{1000\text{m}}$

Tab. 1: Temperaturgradienten der Standardatmosphäre

piert, bis die Höhe 11 km erreicht ist (die Temperatur beträgt dann $-56,5^\circ\text{C}$). Zwischen 11 und 22 km belässt man die Temperatur bei $-56,5^\circ\text{C}$ und berücksichtigt ab 22 km bzw. ab 32 km die in **Tabelle 1** genannten Temperaturgradienten.

Schritt 4: Modellierung der Luftdichte

Zur Berechnung der höhenabhängigen Luftdichte nutzen wir die barometrische Höhenformel [7]

$$\rho(h) = \rho(h_0) \cdot e^{\frac{M \cdot g \cdot \Delta h}{R \cdot T_0}} \quad (\text{Gl. 5})$$

($\rho(h)$ Luftdichte in der Höhe h , M mittlere molare Masse des Atmosphärgases, R universelle Gaskonstante, T_0 absolute Temperatur der isotherm angenommenen Atmosphäre, g Erdbeschleunigung, Δh Höhe über h_0)

für den isothermen Atmosphärenabschnitt und die erweiterte barometrische Höhenformel [7]

$$\rho(h) = \rho(h_0) \cdot \left(1 + \frac{k \rho h}{T(h_0)}\right)^{\frac{M \cdot g}{R \cdot k} - 1} \quad (\text{Gl. 6})$$

die eine lineare Temperaturänderung mit der Höhe berücksichtigt.

Zunächst berechnet man die Dichte für die Höhe $h = 1$ m (verknüpft mit der Spalte „Höhe h in m“, vgl. **Abb. 3**) und kopiert die Zelle durch „Hochziehen“ bis zu $h = 11$ km. Nun verwendet man die Formel für den isothermen Fall, mit $T_0 = T(h = 11 \text{ km})$ und $\rho(h_0) = \rho(h = 11 \text{ km})$. Für die beiden

Dichte in kg/m^3

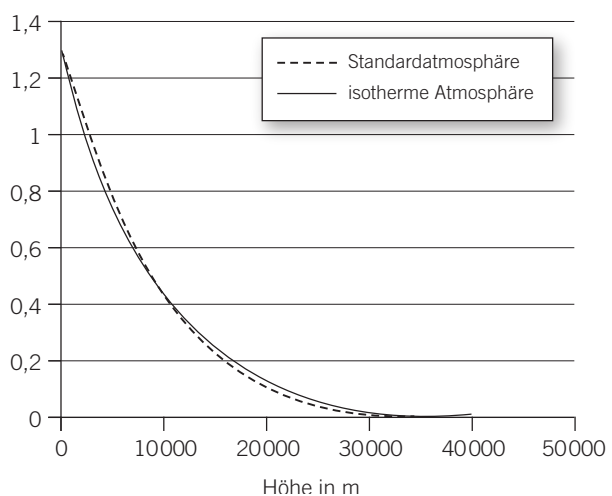


Abb. 3: Vergleich von Standardatmosphäre und isotherm angenommener Atmosphäre

letzten Abschnitte verfährt man analog unter Berücksichtigung der Beziehung 6 und den in **Tabelle 1** angegebenen Temperaturgradienten.

- **Anmerkung:** Wie ein Vergleich des Dichteprofiles der Standardatmosphäre mit dem Dichteverlauf für eine isotherm angenommene Atmosphäre (mit $T_0 = 15^\circ\text{C}$) zeigt, kann im Schulunterricht zur Elementarisierung ggf. auch von einer isothermen Atmosphäre ausgegangen werden (**Abb. 1**).

Schritt 5: Ergänzung weiterer Größen

Folgende Spaltenüberschriften werden ergänzt:

- Beschleunigung a in m/s^2 ,
- Zeitzuwachs Δt in s,
- Zeit t in s,
- Geschwindigkeitsänderung Δv in m/s ,
- Geschwindigkeit v in m/s ,
- Geschwindigkeit ohne Reibung v' in m/s ,
- Schallgeschwindigkeit c in m/s .

Schritt 6: Festlegung der Anfangsbedingungen

Die Anfangsbedingungen der neuen Spalten werden einheitlos eingetragen: $a = 9,81$, $t = 0$, $v = 0$, $v' = 0$; $c = 331,5 \cdot$

$\sqrt{1 + \frac{\theta}{273,15}}$ (Berechnungsgleichung für die Temperaturab-

hängige Schallgeschwindigkeit in Luft [8]; mit der Spalte „Temperatur in $^\circ\text{C}$ “ verknüpfen)

Schritt 7: Berechnung von Δt

Es wird die Zeit Δt berechnet, die zum Durchlaufen der Strecke $\Delta s = 1$ m benötigt wird. Es gilt:

$$\Delta s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \text{ bzw. } 0 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 - \Delta s$$

Lösen der quadratischen Gleichung führt zum Ergebnis

$$\Delta t = -\frac{v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 2a\Delta s}}{a}.$$

Diese Gleichung wird in die zweite Zeile der Spalte „Zeitzuwachs“ eingetragen (v_0 und a mit den Anfangsbedingungen verknüpfen, $\Delta s = 1$ setzen).

Schritt 8: Berechnung der Fallzeit t

In der zweiten Zeile der Spalte „Zeit t in s“ wird die Summe aus der darüberliegenden Zelle und dem Zeitzuwachs gebildet.

Schritt 9: Berechnung der Geschwindigkeitsänderung Δv

Die Geschwindigkeitsänderung in der zweiten Zeile entspricht ungefähr dem Produkt aus dem berechneten Zeitzuwachs und der Beschleunigung, die zu Beginn des betrachteten Streckenelements vorliegt ($\Delta v = a \cdot \Delta t$).

Schritt 10: Berechnung der Geschwindigkeit v

Zur Berechnung der Geschwindigkeit addiert man die Ausgangsgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeitsänderung.

Schritt 11: Berechnung der Beschleunigung a

Die Beschleunigung, die am Ende des durchfallenen Streckenelements vorliegt, wird mithilfe der abgeschätzten Geschwindigkeit berechnet. Es gilt:

$$a = \frac{m \cdot g - 0,5 \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2}{m}$$

Es empfiehlt sich, für die Anfangsbedingungen sowie für die Größen m , c_w und A keine Zahlenwerte einzusetzen, sondern diese Größen an einer anderen Stelle des Tabellenblatts einzugeben, und bei den Gleichungen mit fixen Zellbezügen zu arbeiten (s. **Abb. 4**). So können die Folgen kleiner Änderungen sofort nachvollzogen werden.

Schritt 12: Geschwindigkeit bei Vernachlässigung der Luftreibung v'

Um die Geschwindigkeit bei Vernachlässigung der Luftreibung zu berechnen, wird die in Aufgabe 2 hergeleitete Beziehung $v = \sqrt{2 \cdot s \cdot g}$ genutzt.

Schritt 13: Berechnung der Schallgeschwindigkeit

Die erste Zelle der Spalte „Schallgeschwindigkeit c in m/s “ wird in die zweite Zelle kopiert.

Schritt 14: Kopieren der zweiten Zeile

Abschließend wird die zweite Zeile der in Schritt 5 aufgenommenen Größen durch „Herunterziehen“ bis in eine Höhe von 0 m kopiert.

Modellierung des geplanten Fallschirmsprungs von Felix Baumgartner

Höhe h in m	Fallstrecke s in km	Temperatur θ in °C	Luftdichte ρ in kg/m³	Beschleunigung a in m/s²	Zeit t in s	Geschwindigkeitsänderung Δv in m/s	Geschwindigkeit v in m/s	Geschwindigkeit ohne Reibung v' in m/s	Schallgeschwindigkeit c in m/s²
36000	0	-33,3	0,007415849	9,807	0	0	0	0	310,6367199
35999	0,001	-33,3028	0,007416992	9,80632367	0,451523641	4,429446918	4,429446918	4,429446918	310,6349067
35998	0,002	-33,3056	0,007418135	9,806264634	0,187028242	0,638551822	8,22824299	8,22824299	310,6330935
35997	0,003	-33,3084	0,007419278	9,808896802	0,148513115	0,78206124	124	124	310,6312803
35996	0,004	-33,3112	0,007420421	9,808528871	0,12098227	0,903051554	254	254	310,6294671
35995	0,005	-33,314	0,007421564	9,808160839	0,106593797	1,009647065	1,045528333	1,045528333	310,6276539
35994	0,006	-33,3168	0,007422707	9,807792708	0,096369057	1,106016122	0,945203215	0,945203215	310,6258407
35993	0,007	-33,3196	0,007423850	9,80558182	0,08737448	1,194634748	0,86917956	0,86917956	310,6240274
35992	0,008	-33,3224	0,007425000	9,80558182	0,08737448	1,283259296	0,808989803	0,808989803	310,6222141
35991	0,009	-33,3252	0,007426149	9,80558182	0,08737448	1,371883844	0,759798412	0,759798412	310,6204008
35990	0,01	-33,328	0,007427298	9,80558182	0,08737448	1,460508392	0,71861494	0,71861494	310,6185876
35989	0,011	-33,3308	0,007428447	9,80558182	0,08737448	1,54913294	0,683476857	0,683476857	310,6167743
35988	0,012	-33,3336	0,007429596	9,80558182	0,08737448	1,637757488	0,653035484	0,653035484	310,614961
35987	0,013	-33,3364	0,007430745	9,80521	0,08737448	1,726382036	0,62929191	0,62929191	310,6131476
35986	0,014	-33,3392	0,007431894	9,80484407	0,08737448	1,815006584	0,611316	0,611316	310,6113343
35985	0,015	-33,342	0,007433043	9,80447594	0,08737448	1,903631132	0,598315	0,598315	310,609521
35984	0,016	-33,3448	0,007434192	9,80410781	0,08737448	1,99225568	0,5903202	0,5903202	310,6077076
35983	0,017	-33,3476	0,007435341	9,80373968	0,08737448	2,080880236	0,5863253	0,5863253	310,6058941
35982	0,018	-33,3504	0,007436490	9,80337155	0,08737448	2,169504784	0,5863253	0,5863253	310,6040806
35981	0,019	-33,3532	0,007437639	9,80300342	0,08737448	2,258129332	0,5863253	0,5863253	310,6022671
35980	0,02	-33,356	0,007438788	9,80263529	0,08737448	2,34675388	0,5863253	0,5863253	310,6004536
35979	0,021	-33,3588	0,007439937	9,80226716	0,08737448	2,435378436	0,5863253	0,5863253	310,5986401
35978	0,022	-33,3616	0,007441086	9,80189903	0,08737448	2,524002984	0,5863253	0,5863253	310,5968266
35977	0,023	-33,3644	0,007442235	9,8015309	0,08737448	2,612627532	0,5863253	0,5863253	310,5950131
35976	0,024	-33,3672	0,007443384	9,80116277	0,08737448	2,70125208	0,5863253	0,5863253	310,5932000
35975	0,025	-33,37	0,007444533	9,80079464	0,08737448	2,790000000	0,5863253	0,5863253	310,5913865
35974	0,026	-33,3728	0,007445682	9,80042651	0,08737448	2,878750000	0,5863253	0,5863253	310,5895730
35973	0,027	-33,3756	0,007446831	9,80005838	0,08737448	2,967500000	0,5863253	0,5863253	310,5877595
35972	0,028	-33,3784	0,007447980	9,79969025	0,08737448	3,056250000	0,5863253	0,5863253	310,5859460
35971	0,029	-33,3812	0,007449129	9,79932212	0,08737448	3,145000000	0,5863253	0,5863253	310,5841325
35970	0,03	-33,384	0,007450278	9,79895399	0,08737448	3,233750000	0,5863253	0,5863253	310,5823190
35969	0,031	-33,3868	0,007451427	9,79858586	0,08737448	3,322500000	0,5863253	0,5863253	310,5805055
35968	0,032	-33,3896	0,007452576	9,79821773	0,08737448	3,411250000	0,5863253	0,5863253	310,5786920
35967	0,033	-33,3924	0,007453725	9,79784960	0,08737448	3,500000000	0,5863253	0,5863253	310,5768785
35966	0,034	-33,3952	0,007454874	9,79748147	0,08737448	3,588750000	0,5863253	0,5863253	310,5750650
35965	0,035	-33,398	0,007456023	9,79711334	0,08737448	3,677500000	0,5863253	0,5863253	310,5732515

Abb. 4: Umsetzung der Modellierung in Excel

4									
5	c, w-Wert (ohne Schirm)	1,2		Widerstandsbeiwert					
6	A (ohne Schirm)	0,4 m²		angeströmte Fläche vor dem Öffnen des Schirms					
7	m	95 kg		Masse (Springer mit Fallschirm und Ausrüstung)					
8	g	9,81 m/s²		Erdbeschleunigung					
9	v, 0			Anfangsgeschwindigkeit					
10	h, 0	36000 m		Anfangshöhe					
11	Δ h	1 m		Höhenänderung					
12	c, w-Wert (mit Schirm)	1,3		Widerstandsbeiwert					
13	A (mit Schirm)	16 m²		angeströmte Fläche nach dem Öffnen des Schirms					
14									
15									
16									
17	p, 0	101325 Pa		Normdruck					
18	ρ, 0	1,293 kg/m³		Normdichte					
19									
20	T, 0	288,15 K		Normtemperatur					
21	M	0,02896 kg/mol		mittlere molare Masse des Atmosphären-gases					
22	R	8,314 J/K/mol		universelle Gaskonstante					
23									
24									
25	a (11-20 km)	0 K/m							
26	a (20-32 km)	1 K/100 m		atmosphärische Temperaturgradienten der Standardatmosphäre der					
27	a (ab 32 km)	2,8 K/100 m		ICAO (International Civil Aviation Organization)					
28									
29									
30									
31									

Abb. 5: Anfangsbedingungen und weitere Größen