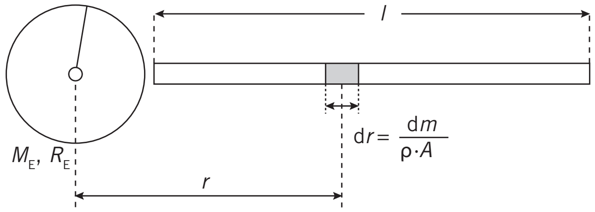
Physik und Technik eines Weltraumfahrstuhls

LÖSUNG 1

Länge des Fahrstuhldrahtes

Der Aufgabenstellung entnimmt man, dass sich der Fahrstuhldraht der gesuchten Länge l mit der Kreisfrequenz ω_E der Erde bewegt. Die gesamte auf den Draht wirkende Zentripetalkraft entspricht der gesamten auf den Draht wirkenden Gravitationskraft. Beide Kräfte hängen vom Abstand r zum Erdmittelpunkt ab, so dass in radialer Richtung über alle Segmente der Länge dr des Drahtes integriert werden muss (s. Skizze).



Es gilt

$$\int_{R_E}^{R_E+l} \mathrm{d}F_G = \int_{R_E}^{R_E+l} \mathrm{d}F_Z \qquad (1)$$

$$\int_{R_E}^{R_E+l} \gamma\, M_E\, \rho\, A \cdot \frac{1}{r^2}\, \mathrm{d}r = \int_{R_E}^{R_E+l} \omega_E^2\, \rho \cdot A\, r\, \mathrm{d}r$$

$$-\gamma\, M_E \frac{1}{r}\Big|_{R_E}^{R_E+l} = \frac{1}{2}\,\omega_E^2\, r^2 \Big|_{R_E}^{R_E+l}$$

$$-\gamma\, M_E \frac{(-l)}{(R_E+l)\, R_E} = \frac{1}{2}\,\omega_E^2\,(l^2 + 2\, R_E\, l)$$

$$l^2 + 3\, R_E\, l + \left(2\, R_E^2 - \frac{2\,\gamma\, M_E}{\omega_E^2\, R_E}\right) = 0$$

Gleichung (1) führt also auf eine quadratische Gleichung der Drahtlänge l. Die physikalisch einzig sinnvolle Lösung ist:

$$l = -\frac{3}{2}\, R_E + \sqrt{\frac{R_E^2}{4} + \frac{2\,\gamma\, M_E}{\omega_E^2\, R_E}}$$

Einsetzen der in **Kasten 1** gegebenen Zahlenwerte ergibt

$$l = 1{,}442 \cdot 10^8\ \mathrm{m} \approx 144\,000\ \mathrm{km}.$$

Anmerkung

Der Draht allein ist noch kein Weltraumfahrstuhl; u. a. sind die Belastungen des Drahtes beim Hinauf- und Herunterfahren einer Fahrstuhlkabine zu berücksichtigen.

LÖSUNG 2

Masse des Drahtes

Es ist $m = \rho\, A\, l$, mit ρ: Dichte, l: Länge und A: Querschnittsfläche des Drahtes.
Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich eine Masse von ca. 281 t bei einer Länge von 36 000 km (geostationärer Orbit) und eine Masse von ca. 1123 t bei einer Länge von 144 000 km.

LÖSUNGSHINWEISE 3

Zugspannung

Die Aufgabe ist inhaltlich nicht an übliche Lehrpläne oder Kerncurricula des Fachs Physik für die Sekundarstunde angebunden; sie ist zudem – wie Aufgabe 1 – mathematisch anspruchsvoll. Daher wird sie in dieser Form nur in Facharbeiten oder speziellen Arbeitsgemeinschaften behandelt werden können.
Mit Ausnahme des Drahtabschnitts im Abstand

$$R_{Geo} = \sqrt[3]{\frac{\gamma\, M_E}{\omega_E^2}}$$

vom Erdmittelpunkt (geostationärer Orbit) muss auf alle Drahtabschnitte eine Zugkraft wirken, damit sie sich mit ω_E auf einer Kreisbahn um die Erde bewegen. Für Drahtabschnitte mit $r > R_{Geo}$ wirkt die Zugkraft in Richtung der Gravitationskraft, für Drahtabschnitte mit $r < R_{Geo}$ ist die Zugkraft entgegengesetzt der Gravitationskraft.
Die Zugkraft auf einen bestimmten Drahtabschnitt hängt vom Abstand r ab und ist bestimmt durch die Differenz von Gravitations- und Zentripetalkraft:

$$\left(\gamma\, M_E\, \rho\, A \cdot \frac{1}{r^2} - \omega_E^2\, \rho\, A \cdot r\right).$$

An der Stelle von $r = R_{Geo}$ ist die Zugkraft T bzw. die Zugspannung $\sigma = \frac{T}{A}$ maximal. Sie berechnet sich durch „Aufsummieren" der Zugspannungen auf alle Drahtabschnitte vom unteren Ende des Drahtes ($r = R_E$) bis R_{Geo}:

$$\sigma_{max} = \frac{T_{max}}{A} = \frac{1}{A}\int_{R_E}^{R_{Geo}} \left(\gamma\, M_E\, \rho\, A \cdot \frac{1}{r^2} - \omega_E^2\, \rho\, A \cdot r\right) \mathrm{d}r$$

$$= \rho \cdot \left(\frac{\gamma\, M_E}{R_E} + \frac{\omega_E^2\, R_E^2}{2} - \frac{3}{2}\left(\omega_E\, \gamma\, M_E\right)^{2/3}\right),$$

mit A: Querschnittsfläche und ρ: Dichte des Drahtes.
Einsetzen der Werte für M_E, R_E, ω_E, γ (s. **Kasten 1**) führt auf die Beziehung $\sigma_{max} = 4{,}85 \cdot 10^7\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot \rho$, mit ρ: Dichte des Drahtes.
Verwendet man für den Draht Stahl mit der Dichte $\rho = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$, so ergibt sich $\sigma_{max} = 3{,}8 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$.
Stahl ist als Drahtmaterial ungeeignet, da die Zerreißspannung sehr viel kleiner ist als σ_{max}.

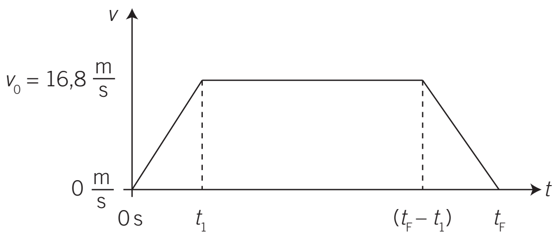
Physik und Technik eines Weltraumfahrstuhls

LÖSUNG 4

Fahrzeit im Weltraumfahrstuhl

a) Es handelt sich um eine gleichmäßige Bewegung mit $v_0 = 16{,}8\,\text{m/s}$. Die Fahrtstrecke $l = 36\,000\,\text{km}$ wird in einer Zeit $t_F = \frac{l}{v_0}$, also $t_F \approx 2{,}1 \cdot 10^6$ s, also in ungefähr 25 Tagen zurückgelegt.

b) Anfänglich liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit $a = 3\,\text{g}$ vor. Nach einer Zeit $t_1 = \frac{v_0}{3\,\text{g}} \approx 0{,}57\,\text{s}$ und einer zurückgelegten Strecke von $s(t_1) = 4{,}8\,\text{m}$ wird die maximale Geschwindigkeit v_0 erreicht. Die Beschleunigungsphase am Ende der Fahrt ist bezüglich Dauer und Strecke identisch zur anfänglichen Beschleunigungsphase. Es ergibt sich das t-v-Diagramm in der **Skizze**.



Der Fahrstuhl bewegt sich gleichförmig in einer Zeitspanne $t_F - 2\,t_1$ über eine Fahrstrecke $l - 2\,s(t_1)$ mit der Geschwindigkeit v_0. Die gesamte Fahrzeit beträgt daher

$$\begin{aligned} t_F &= \frac{l - 2\,s(t_1)}{v_0} + 2\,t_1 = \frac{l}{v_0} - \frac{2\,s(t_1)}{v_0} + 2\,t_1 \\ &= \frac{l}{v_0} + \frac{v_0}{3\,\text{g}}. \end{aligned}$$

Die Fahrtzeit verlängert sich um $\Delta t = \frac{v_0}{3\,\text{g}} \approx 0{,}57$ s.

LÖSUNGSHINWEISE 5

Fahrtkosten

Es geht in dieser Aufgabe um eine Abschätzung der reinen Fahrtkosten; Kosten für beispielsweise den Bau und den Unterhalt der Konstruktion gehen nicht in die Berechnungen ein.

Folgende Fragen und Hinweise können bei der Lösung dieser Aufgabe leiten:

1) Welche Energie wird benötigt, um den Fahrstuhl vom Erdboden bis zum geostationären Orbit zu transportieren?
2) Wie teuer ist 1 kWh elektrische Energie?
3) In der Abschätzung muss berücksichtigt werden, dass
   a) neben der Masse der Person (der Last) auch die Fahrstuhlkabine selbst samt Antrieb transportiert werden muss und
   b) Energie nicht nur für die Bewegung in der Vertikalen nötig ist, sondern auch, weil beispielsweise beim Klettern entlang des Fahrstuhldrahtes Reibung auftritt.

Ein vieldiskutierter Antrieb des Fahrstuhls besteht aus Solarzellen, die vom Erdboden aus mit Laserlicht bestrahlt werden.

4) Welcher Anteil der eingestrahlten Energie wird in Solarzellen in elektrische Energie umgewandelt?
5) Wie viel Energie ist nötig, um ausreichend Energie in Form von Laserlicht zur Verfügung zu stellen?