Das Quadrat als optimales Rechteck — ein Schlüssel für *Optimieren als fundamentale Idee*

Ergänzungen zum Aufsatz in *mathematik lehren, Heft 159, Erhard Friedrich Verlag, 2010*

Hans Humenberger, Wien

1 Beweis von Satz 1 (allgemein)

Im Aufsatz haben wir einen sehr kurzen Beweis von „Satz 1 (allgemein)“ angegeben, der die Existenz des Maximums vorausgestzt hat.

Satz 1 (allgemein):
$x_1 + \ldots + x_n = c \quad$ [konst.] $\quad (x_i, c \geq 0)$:

$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \;\to\;$ Max $\Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$

Für die Schule ist der Beweis im Heftaufsatz, trotz seiner *Lücke*, wegen seiner Einfachheit und Plaussibilität sicher auch ausreichend[1]. Dies wird vielleicht auch dadurch unterstützt, dass selbst Jakob Steiner (1796–1863) beim allgemeinen isoperimetrischen Problem „nur“ bewiesen hat: *Jede ebene Figur, die kein Kreis ist, lässt sich bei gleichem Umfang inhaltsmäßig vergrößern.* Dass hier für einen korrekten Schluss aus obiger Tatsache auf *Der Kreis* **ist** *bei vorgegebenem Umfang die flächenmaximale ebene Figur* noch die Existenz des Maximums vorausgesetzt werden muss, ist Jakob Steiner selbst lange Zeit nicht aufgefallen. Auf diese Lücke wurde er zwar von seinem Zeitgenossen L. Dirichlet (1805–1859) aufmerksam gemacht, sie konnte allerdings erst ziemlich spät von Karl Weierstrass (1815–1897) geschlossen werden.

Der Vollständigkeit halber soll im Folgenden ein möglicher Beweis gegeben werden, der nicht die Existenz des Maximums voraussetzt und einfacher ist als die meisten üblichen Beweise der allgemeinen G-A-Mittelungleichung, die ja äquivalent ist zu „Satz 1 (allgemein)“.

Bezeichnet man das arithmetische Mittel der nichtnegativen x_i mit A, also $A := \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = \frac{c}{n}$, so haben wir zu zeigen:

$$\boxed{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq A^n} \qquad (x_i \geq 0)\ .$$

Beweis:

1. Ersetze im Produkt die kleinste Zahl, z. B. x_1 durch A;
2. ersetze zum Ausgleich (die Summe soll unverändert bleiben!) die größte Zahl, z. B. x_n durch $x_n - (A - x_1) = x_1 + x_n - A$.

Der Produktwert wird dadurch allenfalls größer, denn

$$(\underbrace{A - x_1}_{\geq 0})(\underbrace{x_n - A}_{\geq 0}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Ax_1 + Ax_n - A^2 - x_1 x_n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot x_n \leq A \cdot (x_1 + x_n - A)$$

Also: $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq A \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_n - A)$

Wiederhole diesen Prozess nun ein zweites Mal für $A \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_n - A)$ — diese Werte haben klarerweise wieder A als arithmetisches Mittel (die Summe und die Anzahl der Werte ist ja unverändert geblieben):

Ersetzen des kleinsten Wertes durch A und Ausgleich beim größten Wert; wir erhalten dadurch

$$A \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_n - A) \leq A \cdot A \cdot \ldots$$

und insgesamt daher

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq A \cdot A \cdot \ldots$$

Jeder solche *Schritt* bringt (mindestens) ein weiteres A, so dass sich nach höchstens $n-1$ Schritten die dadurch bewiesene Ungleichungskette ergibt:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq A \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_n - A) \leq$$

$$\leq A \cdot A \cdot \ldots \quad \leq \ \ldots \ \leq A \cdot A \cdot \ldots \cdot A\ .$$

Dadurch erhalten wir die Behauptung

$$\boxed{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq A^n}\ ,$$

ohne die Existenz eines Maximums vorausgesetzt zu haben.

Ganz analog kann auch mit $G := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ die zu Satz 2 äquivalente Tatsache bewiesen werden: $\boxed{x_1 + \ldots + x_n \geq G + \ldots + G = n \cdot G}$.

[1] Man sollte allerdings nicht versäumen, auf seine Lücke explizit hinzuweisen.

2 Weitere Beispiele

Beispiel: In einem kugelförmigen Behälter soll eine Flüssigkeit mit Volumen V gelagert werden. Wie ist der Kugelradius R bzw. die Höhe h der kugelsegmentförmigen Flüssigkeitsmenge zu wählen, so dass die benetzte Fläche (*Kugelhaube*) möglichst klein wird?

Hier benötigt man zunächst die Formel für das Volumen eines Kugelsegments:
$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) \Rightarrow R = \frac{V}{\pi h^2} + \frac{h}{3}$

Des Weiteren braucht man für die Zielfunktion die Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugelhaube $O = 2\pi hR$. Einsetzen für R ergibt:

$$\boxed{O = 2\pi hR = 2\pi h \left(\frac{V}{\pi h^2} + \frac{h}{3}\right) \;\to\; \text{Min}} \qquad | : (2\pi)$$

$$\frac{V}{\pi h} + \frac{h^2}{3} \;\to\; \text{Min}$$

$$\frac{V}{2\pi h} + \frac{V}{2\pi h} + \frac{h^2}{3} \;\to\; \text{Min} \qquad [\text{konst. Prod.}]$$

$$\frac{V}{2\pi h_0} = \frac{h_0^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_0 = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}}$$

Durch Einsetzen: $\boxed{R_0 = h_0}$ $\Rightarrow$ Halbkugel

Beispiel[2]:
Von allen Kugel*hauben* (der gekrümmte Teil der Oberfläche eines Kugelsegmentes) mit konstantem Flächeninhalt O ist jene mit maximalem (Hohl-)Volumen zu finden.

$O = 2\pi hR \Rightarrow R = \frac{O}{2\pi h}$

Einsetzen in die Zielfunktion $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$ ergibt:

$$\boxed{V = \pi h^2 \left(\frac{O}{2\pi h} - \frac{h}{3}\right) \;\to\; \text{Max}} \qquad | : \pi$$

$$h \left(\frac{O}{2\pi} - \frac{h^2}{3}\right) \;\to\; \text{Max} \quad |^2$$

$$h^2 \left(\frac{O}{2\pi} - \frac{h^2}{3}\right)\left(\frac{O}{2\pi} - \frac{h^2}{3}\right) \;\to\; \text{Max} \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}h^2\right)\left(\frac{O}{2\pi} - \frac{h^2}{3}\right)\left(\frac{O}{2\pi} - \frac{h^2}{3}\right) \;\to\; \text{Max}$$
[konst. Summe]

$$\frac{2}{3}h_0^2 = \frac{O}{2\pi} - \frac{h_0^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_0 = \sqrt{\frac{O}{2\pi}}}.$$

Durch Berechnen von $\boxed{R_0 = \sqrt{\frac{O}{2\pi}}}$ erkennt man $h_0 = R_0$: die Kugelhaube mit maximalem Hohlvolumen muss also HALBKUGELform haben.

[2] Bereits von ARCHIMEDES behandelt. Das ist die duale Aufgabe zu obigem Beispiel.

Beispiel: Über der Mitte eines runden Tisches (Radius r) hängt eine Lampe. In welcher Höhe h muss diese Lampe angebracht werden für eine möglichst starke Beleuchtung des Tischrandes (siehe Fig. 1)?

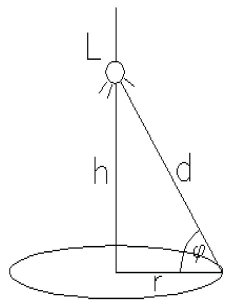

Fig. 1: Beleuchtungsstärke – Tischrand

Für die Beleuchtungsstärke I ist aus der Physik bekannt: $I = k\frac{\sin\varphi}{d^2}$, wobei k ein Proportionalitätsfaktor ist. Wir wählen den Winkel φ als Variable und erhalten wegen $d = \frac{r}{\cos\varphi}$:

$$\boxed{I = \frac{k}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi \;\to\; \text{Max}} \qquad | : \frac{k}{r^2}$$

$\sin\varphi\left(1 - \sin^2\varphi\right) \;\to\; \text{Max} \quad |^2,\ \cdot 2$
[hier „spielt $\sin\varphi$ die Rolle von x“, oder konkrete Substitution $x := \sin\varphi$]

$\left(2\sin^2\varphi\right)\left(1 - \sin^2\varphi\right)\left(1 - \sin^2\varphi\right) \;\to\; \text{Max}$
[nun konstante Summe]

$$2\sin^2\varphi_0 = 1 - \sin^2\varphi_0 \Rightarrow \sin\varphi_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(\varphi_0 \approx 35°) \qquad \cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,, \qquad \tan\varphi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{h_0 = r \cdot \tan\varphi_0 = \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \cdot r}$$

3 Verallgemeinerungen

Im Aufsatz haben wir gezeigt, wie man mit der neuen Methode Aufgabn der Art $x^2 + \frac{B}{x} \to \text{Min}\ (B, x > 0)$ bzw. $x + \frac{B}{x^2} \to \text{Min}\ (B, x > 0)$ lösen kann.

Dies kann man ganz leicht verallgemeinern:

$$\boxed{x + \frac{B}{x^n} \;\to\; \text{Min}} \qquad \boxed{x^m + \frac{B}{x} \;\to\; \text{Min}}$$

$$m, n \in \mathbb{N}^*; \quad B, x > 0$$

$$x_0 = \sqrt[n+1]{nB} \qquad x_0 = \sqrt[m+1]{\frac{B}{m}}$$

Sogar noch allgemeiner: $\boxed{Ax^m + \frac{B}{x^n} \;\rightarrow\; \text{Min}}$

$m, n \in \mathbb{N}^*; A, B, x > 0$

Beweis nach demselben Prinzip wie oben:

$$\underbrace{\frac{Ax^m}{n} + \ldots + \frac{Ax^m}{n}}_{n \text{ Summanden}} + \underbrace{\frac{B}{mx^n} + \ldots + \frac{B}{mx^n}}_{m \text{ Summanden}} \rightarrow \text{Min}$$

Beim Bilden des Produktes heben dann die $(x^m)^n$ im Zähler die $(x^n)^m$ im Nenner auf und wir erhalten ein konstantes Produkt.

$$\frac{Ax_0^m}{n} = \frac{B}{mx_0^n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \sqrt[m+n]{\frac{nB}{mA}}}$$

Dieser allgemeine Ansatz (und auch die folgenden) sind *in keiner Weise* zum Auswendiglernen als *Formel* gedacht, sie sollen nur die Kraft dieser Methode demonstrieren. In der Schule soll dieses Prinzip natürlich primär an konkreten Beispielen (konkrete Werte von m und n, bzw. Anwendungskontexte) jeweils neu durchgeführt werden.

- $\boxed{x^m(A-x) \;\rightarrow\; \text{Max}}$

  $A > 0\,; \quad m \in \mathbb{N}^*\,; \quad x \in [0, A]$

  $\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot (A-x) \;\rightarrow\; \text{Max} \quad | \cdot m$

  $\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot (mA - mx) \;\rightarrow\; \text{Max}$

  [nun konstante Summe]

  $x_0 = mA - mx_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \frac{mA}{m+1}}$

- $\boxed{x(A-x)^\ell \;\rightarrow\; \text{Max}}$

  $A > 0\,; \quad \ell \in \mathbb{N}^*\,; \quad x \in [0, A]$

  $x \cdot \underbrace{(A-x) \cdot \ldots \cdot (A-x)}_{\ell \text{ Faktoren}} \;\rightarrow\; \text{Max} \quad | \cdot \ell$

  $(\ell x) \cdot \underbrace{(A-x) \cdot \ldots \cdot (A-x)}_{\ell \text{ Faktoren}} \;\rightarrow\; \text{Max}$

  [nun konstante Summe]

  $\ell x_0 = A - x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \frac{A}{\ell + 1}}$

- $\boxed{x(A-x^n) \;\rightarrow\; \text{Max}}$

  $A > 0\,; \quad n \in \mathbb{N}^*\,; \quad x \in \left[0, \sqrt[n]{A}\right]$

  $x(A-x^n) \;\rightarrow\; \text{Max} \quad |^n$ „um x auf gleiche Potenz wie in der Klammer zu bringen"

  $x^n \cdot \underbrace{(A-x^n) \cdot \ldots \cdot (A-x^n)}_{n \text{ Faktoren}} \;\rightarrow\; \text{Max} \quad | \cdot n$

  $(nx^n) \cdot \underbrace{(A-x^n) \cdot \ldots \cdot (A-x^n)}_{n \text{ Faktoren}} \;\rightarrow\; \text{Max}$

  [nun konstante Summe]

  $nx_0^n = A - x_0^n \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \sqrt[n]{\frac{A}{n+1}}}$

- $\boxed{x^m(A-x)^\ell \;\rightarrow\; \text{Max}}$

  $A > 0\,; \quad m, \ell \in \mathbb{N}^*\,; \quad x \in [0, A]$

  $\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(A-x) \cdot \ldots \cdot (A-x)}_{\ell \text{ Faktoren}} \rightarrow \text{Max}$

  Die Potenz $x^m = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}}$ wird deswegen aufgeteilt, weil alle „x-Faktoren" bei der Summenbildung denselben Exponenten (hier 1, in $A - x$ sichtbar) haben sollten, damit sie beim Addieren zusammengefasst werden können. Die Summe aller Faktoren würde $mx + \ell A - \ell x$ betragen; $+mx$ zu Beginn wiegt $-\ell x$ leider nicht auf, die Summe ist nicht konstant. Daher wird wieder geeignet multipliziert:

  $\underbrace{\ell x \cdot \ldots \cdot \ell x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(mA - mx) \cdot \ldots \cdot (mA - mx)}_{\ell \text{ Faktoren}} \rightarrow \text{Max}$

  [nun konstante Summe $\ell \cdot mA$]

  $\ell x_0 = mA - mx_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \frac{mA}{m+\ell}}$

  Als Alternative könnte man auch geeignet dividieren, so dass die Faktoren sich jeweils zu $1 \cdot x$ aufsummieren:

  $\underbrace{\frac{x}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{m}}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{\left(\frac{A}{\ell} - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{A}{\ell} - \frac{x}{\ell}\right)}_{\ell \text{ Faktoren}} \rightarrow \text{Max}$

- $A > 0\,; \quad m, n, \ell \in \mathbb{N}^*\,; \quad x \in \left[0, \sqrt[n]{A}\right]$

  $\boxed{x^m\,(A-x^n)^\ell \;\rightarrow\; \text{Max}} \quad |^n$

  Wir erheben zur n-ten Potenz, „um aus dem x^m ein x^n zu machen" (statt $(x^m)^n$ schreiben wir gleich $(x^n)^m$):

  $(x^n)^m\,(A-x^n)^{n\ell} \;\rightarrow\; \text{Max}$

  Mit $y := x^n$ lautet dieses Problem

  $y^m(A-y)^{n\ell} \;\rightarrow\; \text{Max}$
  $A > 0\,; \quad m, n, \ell \in \mathbb{N}^*\,; \quad y \in [0, A]$,

  dessen Lösung $y_0 = \frac{mA}{m+n\ell}$ wir von oben schon kennen. Daher erhalten wir für x_0:

$$\boxed{x_0 = \sqrt[n]{\frac{mA}{m+n\ell}}}$$

4 Weitere Aufgaben: Quader-Würfel – Volumen, Oberfläche, Kantenlängensumme

Quader mit minimaler Kantenlängensumme bei festem Volumen V:

$\ell \cdot b \cdot h = V$

$\boxed{4(\ell + b + h) \;\to\; \text{Min}} \quad |:4$

$\ell + b + h \;\to\; \text{Min} \;\; [\text{konst. Produkt } V]$

$\boxed{\ell_0 = b_0 = h_0 \;\left(= \sqrt[3]{V}\right) \qquad \text{WÜRFEL}}$

Quader mit minimaler Oberfläche bei festem Volumen V :

$\ell \cdot b \cdot h = V$

$\boxed{2\,(\ell b + bh + \ell h) \;\to\; \text{Min}} \quad |:2$

$\ell b + bh + \ell h \;\to\; \text{Min}$

$[\text{konst. Prod.: } (\ell b) \cdot (bh) \cdot (\ell h) = \ell^2 \cdot b^2 \cdot h^2 = V^2]$

$\ell_0 b_0 = b_0 h_0 = \ell_0 h_0 \;\Rightarrow\; \ell_0 = b_0 = h_0 \;\left(= \sqrt[3]{V}\right)$

$\boxed{\text{WÜRFEL}}$

Dazu dual: volumengrößter Quader bei fester Oberfläche $2F$:

$\ell b + bh + \ell h = F$

$\boxed{V = \ell \cdot b \cdot h \;\to\; \text{Max}} \quad |^2$

$\ell^2 \cdot b^2 \cdot h^2 \;\to\; \text{Max}$

$\underbrace{(\ell b) \cdot (bh) \cdot (\ell h)}_{\ell^2 \cdot b^2 \cdot h^2} \;\to\; \text{Max} \;\; [\text{konst. Summe } F]$

$\ell_0 b_0 = b_0 h_0 = \ell_0 h_0 \;\Rightarrow\; \ell_0 = b_0 = h_0 \;\left(= \sqrt{\frac{F}{3}}\right)$

$\boxed{\text{WÜRFEL}}$

Materialminimaler Kanister (oben offener Quader) bei festem Volumen V

$\ell \cdot b \cdot h = V$

$\boxed{\ell b + 2bh + 2\ell h \;\to\; \text{Min}}$

Produkt:
$(\ell b) \cdot (2bh) \cdot (2\ell h) = 4(\ell bh)^2 = 4V^2 \qquad [\text{konstant}]$

$\ell_0 b_0 = 2b_0 h_0 = 2\ell_0 h_0$

$\boxed{\ell_0 = b_0 = 2h_0 \qquad \text{HALBER WÜRFEL}}$

Dazu dual: Volumenmaximaler Kanister (oben offener Quader) bei fester Oberfläche F

$\boxed{\ell b + 2bh + 2\ell h = F}$

$\boxed{V = \ell \cdot b \cdot h \;\to\; \text{Max}} \quad |^2, \; \cdot 4$

$(\ell b) \cdot (2bh) \cdot (2\ell h) \;\to\; \text{Max} \; [\text{konst. Summe } F]$

$\ell_0 b_0 = 2b_0 h_0 = 2\ell_0 h_0$

$\boxed{\ell_0 = b_0 = 2h_0 \qquad \text{HALBER WÜRFEL}}$

5 Weitere Literatur

Dieses Literaturverzeichnis enthält absichtlich nicht nur im Aufsatz zitierte Literatur, sondern noch viele andere interessante Litaraturstellen zum Thema *Optimieren*.

1. Böer, H. (1998): Realistische Extremwertprobleme. In: **ml 89**, 58–61.
2. Claus, H.J. (1992): Extremwertaufgaben. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
3. Danckwerts, R. u. D. Vogel (Hrsg. 2001): Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung. Themenheft mit 5 Beiträgen der Herausgeber: **MU 47**, 4.
4. Dörr, R. (1989): Extremwertaufgaben erst ab Klasse 11? In: **MiS 27**, 10, 688–698.
5. Dörr, R. (1991): Einige Gedanken zur Befähigung der Schüler der Abiturstufe zum selbständigen Bearbeiten von Extremwertaufgaben. In: **MiS 29**, 1, 33–45.
6. Glatfeld, M. (Hrsg., 1969, 1972, 1977, 1982 und 1984): Extremwertprobleme I, II, III, IV und V. Themenhefte: **MU 15**, 5; **MU 18**, 5; **MU 23**, 4; **MU 28**, 5 und **MU 30**, 6.
7. Glatfeld, M. (1989): Bemerkungen zum Thema „Extremwerte“ in den Klassenstufen 9 und 10. In: **ml 37**, 19–22.
8. Kirsch, A. (1997): Ein Beweis der Mittelungleichung – „im Kopf“ nachzuvollziehen. In: **MiS 35**, 9, 483–486.
9. Niven, I. (1981): Maxima and Minima without Calculus. The Mathematical Association of America. Washington.
10. Quaisser, E. u. H.-J. Sprengel (1986): Extrema. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
11. Schupp, H. (1984a): Optimieren als Leitlinie im Mathematikunterricht. In: **MSB 31**, 1, 59–76.
12. Schupp, H. (1984b): Extremwertbestimmungen mit Hilfe der Dreiecksungleichung. In: **MU 30**, 6, 6–21.
13. Schupp, H. (1992): Optimieren: Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Bibliographisches Institut, Mannheim–Leipzig–Wien–Zürich.
14. Schupp, H. (Hrsg., 1997): Optimieren. Themenheft **ml 81**.
15. Tikhomirov, V.M. (1990): Stories about Maxima and Minima. American Mathematical Society – Mathematical Association of America.