MARIA KOTH

Lösungen zu den Arbeitsblättern 1 bis 3

Aufgaben mit Ziffernkarten
mathematik lehren 159

Lösungen zu Arbeitsblatt 1: Additionen und Subtraktionen mit Ziffernkarten legen

1 Beispiele für Lösungen sind:

a)	Summe möglichst groß:	963 + 852 + 741 = 2 556
b)	Summe möglichst klein:	147 + 258 + 369 = 774
c)	Summe möglichst nahe an 1 000:	469 + 378 + 152 = 999
d)	Summe möglichst nahe an 2 000:	951 + 763 + 284 = 1 998

Eine wesentliche Erkenntnis bei der Lösung dieser Aufgabe ist, dass das gesuchte Ergebnis stets auf verschiedene Arten erreicht werden kann: So erhält man, zum Beispiel, das größte Ergebnis 2 556 immer dann, wenn an den Hunderterstellen der drei Summanden die Ziffern 7, 8 und 9, an den Zehnerstellen die Ziffern 4, 5, und 6 und an den Einerstellen die Ziffern 1, 2, und 3 stehen. Daher gibt es

- drei Möglichkeiten für die Hunderterstelle des ersten Summanden,
- dann noch zwei für die des zweiten Summanden und
- noch eine für die des dritten Summanden.

Analoges gilt für die drei Zehnerstellen und die drei Einerstellen. Insgesamt gibt es zur Summe 2556 daher 3·2·1·3·2·1·3·2·1 = 216 verschiedene Anordnungen der Ziffern 1 bis 9 in den drei Summanden.

In höheren Schulstufen kann mit Hilfe von Teilbarkeitsüberlegungen gezeigt werden, dass das Ergebnis von Aufgabe 1 stets ein Vielfaches von 9 ist:

Jede natürliche Zahl ergibt nämlich beim Teilen durch 9 denselben Rest wie die Division ihrer Ziffernsumme durch 9. Da in den drei Summanden jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal vorkommt, und da die Summe 1 + 2 + 3 +...+ 9 = 36 durch 9 teilbar ist, muss auch die Ziffernsumme des Ergebnisses (und daher dieses selbst) durch 9 teilbar sein.

Aus diesem Grund kann die Summe der drei Zahlen den exakten Wert 1000 (bzw. 2000) nicht annehmen, und 999 (bzw. 1998) ist als nächstliegendes Vielfaches von 9 tatsächlich das optimale Ergebnis.

2 Beispiele für Lösungen sind:

Ziffern:	**a)** Summe möglichst groß:	**b)** Summe möglichst klein:
1 2 3 4 5 6 7 8	8 642 + 7 531 = 16 173	1 357 + 2 468 = 3 825
1 2 3 4 5 6 7 9	9 642 + 7 531 = 17 173	1 357 + 2 469 = 3 826
1 2 3 4 5 6 8 9	9 642 + 8 531 = 18 173	1 358 + 2 469 = 3 827
1 2 3 4 5 7 8 9	9 742 + 8 531 = 18 273	1 358 + 2 479 = 3 837
1 2 3 4 6 7 8 9	9 742 + 8 631 = 18 373	1 368 + 2 479 = 3 847
1 2 3 5 6 7 8 9	9 752 + 8 631 = 18 383	1 368 + 2 579 = 3 947
1 2 4 5 6 7 8 9	9 752 + 8 641 = 18 393	1 468 + 2 579 = 4 047
1 3 4 5 6 7 8 9	9 753 + 8 641 = 18 394	1 468 + 3 579 = 5 047
2 3 4 5 6 7 8 9	9 753 + 8 642 = 18 395	2 468 + 3 579 = 6 047

Ziffern:	**c)** Tausenderzahl als Summe:
1 2 3 4 5 6 7 8	7 568 + 1 432 = 9 000
1 2 3 4 5 6 7 9	5 679 + 4 321 = 10 000
1 2 3 4 5 6 8 9	8 569 + 2 431 = 11 000
1 2 3 4 5 7 8 9	8 579 + 3 421 = 12 000
1 2 3 4 6 7 8 9	8 679 + 4 321 = 13 000
1 2 3 5 6 7 8 9	8 769 + 5 231 = 14 000
1 2 4 5 6 7 8 9	8 759 + 6 241 = 15 000
1 3 4 5 6 7 8 9	8 569 + 7 431 = 16 000
2 3 4 5 6 7 8 9	9 568 + 7 432 = 17 000

3 Lösungen sind:

286 + 173 = 459	487 + 152 = 639	569 + 214 = 783	659 + 214 = 873	683 + 271 = 954
295 + 173 = 468	397 + 251 = 648	658 + 134 = 792	657 + 234 = 891	738 + 216 = 954
359 + 127 = 486	439 + 218 = 657	576 + 243 = 819	567 + 324 = 891	748 + 215 = 963
368 + 127 = 495	493 + 182 = 675	467 + 352 = 819	675 + 243 = 918	658 + 314 = 972
387 + 162 = 549	394 + 281 = 675	695 + 142 = 837	576 + 342 = 918	746 + 235 = 981
439 + 128 = 567	478 + 215 = 693	596 + 241 = 837	586 + 341 = 927	657 + 324 = 981
349 + 218 = 567	586 + 143 = 729	529 + 317 = 846	784 + 152 = 936	
394 + 182 = 576	596 + 142 = 738	739 + 125 = 864	783 + 162 = 945	
378 + 216 = 594	659 + 124 = 783	593 + 271 = 864	628 + 317 = 945	

Kleinstes Ergebnis ist 459, größtes Ergebnis ist 981.

Weitere Lösungen erhält man, indem man die Hunderterziffern, die Zehnerziffern oder die Einerziffern der beiden Summanden vertauscht. Unter Einbeziehung der Tauschaufgaben können so jeder der oben angeführten Lösungen sieben weitere Lösungen zugeordnet werden.

Zum Beispiel: 286 + 173 = 459 → 173 + 286 = 459
186 + 273 = 459 und 273 + 186 = 459
276 + 183 = 459 und 183 + 276 = 459
283 + 176 = 459 und 176 + 283 = 459

Auch hier kann man (in höheren Schulstufen) mit Hilfe von Teilbarkeitsüberlegungen zeigen, dass das Ergebnis stets ein Vielfaches von 9 sein muss sowie dass tatsächlich 459 die kleinstmögliche und 981 die größtmögliche Summe ist:

Sind a, b, c, d, e, f die sechs Ziffern der beiden Summanden, so ergibt die Summe dieser beiden Zahlen beim Teilen durch 9 denselben Rest r wie die Division (a + b + c + d + e + f) : 9.

Da 1 + 2 + ... + 9 durch 9 teilbar ist, muss die Summe der restlichen drei Ziffern g, h, i und damit auch die aus diesen Ziffern gebildete Zahl beim Teilen durch 9 den Rest 9 – r ergeben. Da 9 ungerade ist, können die beiden Reste r und 9 – r aber nur dann übereinstimmen, wenn r = 0 ist.

Die größte dreistellige durch 9 teilbare Zahl, die aus drei verschiedenen Ziffern besteht ist 981. Daher kann es kein größeres Ergebnis als 981 geben, und zu 981 kann man durch Probieren Lösungen finden (siehe oben).

Umgekehrt überlegt man, dass das kleinste Ergebnis auf jeden Fall größer als 400 sein muss: Andernfalls müssten nämlich an den drei Hunderterstellen die Ziffern 1, 2 und 3 stehen, und die aus den Zehner- und Einerstellen der Summanden gebildeten Zahlen müssten eine zweistellige Summe haben. Das ist aber mit den Ziffern 4 bis 9 nicht möglich.

Nun kommen aber die durch 9 teilbaren Zahlen 405, 414, 441 und 450 als Ergebnis nicht in Frage, weil sie nicht aus drei verschiedenen Ziffern bestehen bzw. weil die Ziffer 0 vorkommt. Auch die Zahlen 423 und 432 können nicht Ergebnis sein, weil an den Hunderterstellen der beiden Summanden entweder die beiden Ziffern 1 und 2 oder die Ziffern 1 und 3 stehen müssten und 2 bzw. 3 nicht doppelt vorkommen darf. Daher ist kein kleineres Ergebnis als 459 möglich, und zu 459 kann man tatsächlich Lösungen finden.

4 Jede Addition von Aufgabe 3 liefert als Umkehraufgaben zwei Subtraktionen, in denen jede der Ziffern 1 bis 9 vorkommt, zum Beispiel:

$$283 + 176 = 459 \;\Rightarrow\; 459 - 176 = 283 \quad \text{und} \quad 459 - 283 = 176$$

Kleinstes Ergebnis ist 124, zum Beispiel: 783 – 659 = 124
Größtes Ergebnis ist 784, zum Beispiel: 936 – 152 = 784

5 Der Unterschied ist möglichst groß für die Ziffern 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9:
9 876 – 1 234 = 8 642

Der Unterschied ist möglichst klein für die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 (oder für 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9):
5 123 – 4 987 = 136 und auch 6 123 – 5 987 = 136

6 **a)** Unterschied möglichst groß: 98 765 – 1 234 = 97 531
b) Unterschied möglichst klein: 12 345 – 9 876 = 2 469

7 **a)** 98 643 – 34 689 = 63 954

b) ---

c) Der größte Unterschied ist am größten für die Ziffern 1, 2, 3, 8, 9
(oder auch für 1, 2, 4, 8, 9 oder 1, 2, 5, 8, 9 oder 1, 2, 6, 8, 9 oder 1, 2, 7, 8, 9):

98 321 – 12 389 = 85 932 98 421 – 12 489 = 85 932 98 521 – 12 589 = 85 932
98 621 – 12 689 = 85 932 98 721 – 12 789 = 85 932

Der größte Unterschied ist am kleinsten für die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5
(oder auch für 2, 3, 4, 5, 6 oder 3, 4, 5, 6, 7 oder 4, 5, 6, 7, 8 oder 5, 6, 7, 8, 9):

54 321 – 12 345 = 41 976 65 432 – 23 456 = 41 976 76 543 – 34 567 = 41 976
87 654 – 45 678 = 41 976 98 765 – 56 789 = 41 976

In höheren Schulstufen könnte Aufgabe 7 auch mit Hilfe von Variablen gelöst werden:
Sind, allgemein $a < b < c < d < e$ die fünf der Größe nach geordneten Ziffern, so ist der Unterschied zwischen

- der größtmöglichen Zahl $10\,000\,e + 1\,000\,d + 100\,c + 10\,b + a$
- und der kleinstmöglichen Zahl $10\,000\,a + 1\,000\,b + 100\,c + 10\,d + e$

aus diesen fünf Ziffern gegeben durch:

$$\begin{aligned} & 9\,999\,e - 9\,999\,a + 990\,d - 990\,b = \\ = \; & 9\,999\,(e - a) + 990\,(d - b) = \\ = \; & 99 \cdot [101\,(e - a) + 10\,(d - b)] = \\ = \; & 99 \cdot [100\,(e - a) + 10\,(d - b) + (e - a)] \end{aligned}$$

Die Darstellung mit Variablen zeigt sofort, dass dieser Unterschied

- möglichst groß ist für: e = 9, a = 1, d = 8, b = 2 und c = 3, 4, 5, 6 oder 7
- und möglichst klein ist für: e – a = 4 und d – b = 2, dh. für beliebige fünf aufeinanderfolgende Ziffern

Außerdem erkennt man, dass der Unterschied zwischen der größten und der kleinsten Zahl stets durch 99 teilbar ist und nur 15 verschiedene Werte annehmen kann, nämlich nur

$99 \cdot 424 = 41\,976$	$99 \cdot 646 = 63\,954$	$99 \cdot 828 = 81\,972$
$99 \cdot 525 = 51\,975$	$99 \cdot 727 = 71\,973$	$99 \cdot 838 = 82\,962$
$99 \cdot 535 = 52\,965$	$99 \cdot 737 = 72\,963$	$99 \cdot 848 = 83\,952$
$99 \cdot 626 = 61\,974$	$99 \cdot 747 = 73\,953$	$99 \cdot 858 = 84\,942$
$99 \cdot 636 = 62\,964$	$99 \cdot 757 = 74\,943$	$99 \cdot 868 = 85\,932$

Analog dazu könnte man zeigen, dass auch der Unterschied zwischen der größten und der kleinsten aus drei (bzw. aus sieben oder aus allen neun) der Ziffern 1 bis 9 gebildeten Zahl stets durch 99 teilbar ist.

Für eine gerade Anzahl von Ziffern ist die Differenz aus der größten und der kleinsten Zahl aus diesen Ziffern stets zumindest durch 9 teilbar: Da die beiden Zahlen aus denselben Ziffern gebildet werden, haben sie denselben Rest beim Teilen durch 9. Daraus folgt, dass ihre Differenz durch 9 teilbar ist.

Lösungen zu Arbeitsblatt 2:
Multiplikationen mit möglichst großem/kleinem Ergebnis

1 **a)** Insgesamt gibt es sechs verschiedene Multiplikationen:

$\underline{37 \cdot 2 = 74}$	$\underline{27 \cdot 3 = 81}$	$\underline{73 \cdot 2 = 146}$	$\underline{23 \cdot 7 = 161}$	$\underline{72 \cdot 3 = 216}$	$\underline{32 \cdot 7 = 224}$
$30 \cdot 2 = 60$	$20 \cdot 3 = 60$	$70 \cdot 2 = 140$	$20 \cdot 7 = 140$	$70 \cdot 3 = 210$	$30 \cdot 7 = 210$
$7 \cdot 2 = 14$	$7 \cdot 3 = 21$	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 7 = 21$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 7 = 14$

Größtes Ergebnis hat die Aufgabe $32 \cdot 7 = 224$,
kleinstes Ergebnis die Aufgabe $37 \cdot 2 = 74$.

b) Der halbschriftliche Lösungsweg der sechs Aufgaben verdeutlicht:
Egal welche drei Ziffern man wählt,

- größtes Ergebnis hat immer die Aufgabe:

Zweitgrößte Ziffer	Kleinste Ziffer	•	Größte Ziffer

- kleinstes Ergebnis hat immer die Aufgabe:

Zweitgrößte Ziffer	Größte Ziffer	•	Kleinste Ziffer

c) Der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Ergebnis ist

- am größten für die Ziffern 1, 8, 9 (nämlich 640)
- am kleinsten für die Ziffern 1, 2, 3 (nämlich 40)

d) Der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Ergebnis ist eine Hunderterzahl für

1, 2, 6:	$21 \cdot 6 - 26 \cdot 1 = 100$	**4, 6, 9:**	$64 \cdot 9 - 69 \cdot 4 = 300$	**2, 5, 6:**	$52 \cdot 6 - 56 \cdot 2 = 200$
1, 4, 6:	$41 \cdot 6 - 46 \cdot 1 = 200$	**4, 8, 9:**	$84 \cdot 9 - 89 \cdot 4 = 400$	**2, 5, 8:**	$52 \cdot 8 - 58 \cdot 2 = 300$
2, 4, 7:	$42 \cdot 7 - 47 \cdot 2 = 200$	**4, 5, 6:**	$54 \cdot 6 - 56 \cdot 4 = 100$	**1, 5, 7:**	$51 \cdot 7 - 57 \cdot 1 = 300$
2, 6, 7:	$62 \cdot 7 - 67 \cdot 2 = 300$	**4, 5, 8:**	$54 \cdot 8 - 58 \cdot 4 = 200$	**1, 5, 9:**	$51 \cdot 9 - 59 \cdot 1 = 400$
3, 4, 8:	$43 \cdot 8 - 48 \cdot 3 = 200$	**3, 5, 7:**	$53 \cdot 7 - 57 \cdot 3 = 200$		
3, 6, 8:	$63 \cdot 8 - 68 \cdot 3 = 300$	**3, 5, 9:**	$53 \cdot 9 - 59 \cdot 3 = 300$		

In höheren Schulstufen könnte Aufgabe 1 auch mit Hilfe von Variablen dargestellt werden:

Sind, allgemein $a < b < c$ drei der Größe nach geordneten Ziffern, so sind die sechs möglichen Multiplikationen gegeben durch:

$(10a + b) \cdot c = 10ac + bc$	$(10a + c) \cdot b = 10ab + bc$	$(10b + c) \cdot a = 10ab + ac$
$(10b + a) \cdot c = 10bc + ac$	$(10c + a) \cdot b = 10bc + ab$	$(10c + b) \cdot a = 10ac + ab$

Da wegen $1 \le a < b < c \le 9$ stets $ab < ac < bc < 10ab < 10ac < 10bc$ ist, folgt, dass stets

$(10b + a) \cdot c = 10bc + ac$ das größte der sechs Ergebnisse und
$(10b + c) \cdot a = 10ab + ac$ das kleinste der sechs Ergebnisse ist.

Der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten der sechs Multiplikationsergebnisse ist gegeben durch:

$$10bc - 10ab = 10b \cdot (c - a)$$

Die Darstellung mit Variablen zeigt, dass dieser Unterschied

- seinen größten Wert für $c = 9$, $a = 1$ und $b = 8$
- und seinen kleinsten Wert für $c = 3$, $a = 1$ und $b = 2$ annimmt.

Außerdem sieht man sofort, dass der Unterschied $10b \cdot (c - a)$ zwischen dem größten und dem kleinsten Ergebnis stets eine Zehnerzahl ist. Dieser Unterschied ist genau dann eine Hunderterzahl, wenn $b \cdot (c - a)$ durch 10 teilbar ist, das heißt,

- wenn entweder b gerade und $c - a = 5$ ist
- oder wenn $c - a$ gerade und $b = 5$ ist.

2 **a)** Insgesamt gibt es 24 verschiedene Multiplikationen (12 Aufgaben und die zugehörigen Tauschaufgaben) mit 12 verschiedenen Ergebnissen:

$34 \cdot 67 = 67 \cdot 34 = 2\,278$	$36 \cdot 47 = 47 \cdot 36 = 1\,692$	$37 \cdot 46 = 46 \cdot 37 = 1\,702$
$34 \cdot 76 = 76 \cdot 34 = 2\,584$	$36 \cdot 74 = 74 \cdot 36 = 2\,664$	$37 \cdot 64 = 64 \cdot 37 = 2\,368$
$43 \cdot 67 = 67 \cdot 43 = 2\,881$	$63 \cdot 47 = 47 \cdot 63 = 2\,961$	$73 \cdot 46 = 46 \cdot 73 = 3\,358$
$43 \cdot 76 = 76 \cdot 43 = 3\,268$	$63 \cdot 74 = 74 \cdot 63 = 4\,662$	$73 \cdot 64 = 64 \cdot 73 = 4\,672$

Hinweis:
Nicht für jede beliebige Wahl der vier Ziffern erhält man 12 verschiedene Ergebnisse. Erfüllen die vier Ziffern $a < b < c < d$ die Bedingung $ad = bc$, so gibt es nur 10 verschiedene Ergebnisse. Das ist bei den Ziffern 1, 2, 3, 6 oder 1, 2, 4, 8 oder 2, 3, 4, 6 oder 2, 3, 6, 9 oder 3, 4, 6, 8 der Fall.

Größtes Ergebnis:
Klarerweise müssen in der Aufgabe mit dem größten Ergebnis die beiden größten Ziffern 6 und 7 an den Zehnerstellen der beiden Faktoren platziert werden. Daher kommen nur die beiden Aufgaben $73 \cdot 64$ und $74 \cdot 63$ in Frage. Die halbschriftliche Darstellung des Lösungsweges dieser zwei Aufgaben –etwa anhand eines Malkreuzes- zeigt, warum $73 \cdot 64$ das größere Ergebnis hat:

·	60	4
70	4200	280
3	180	12

·	60	3
70	4200	210
4	240	12

Die beiden Teilprodukte $70 \cdot 60 = 4200$ und $3 \cdot 4 = 12$ treten in beiden Aufgaben auf. Daneben findet man in der ersten Aufgabe $70 \cdot 4 + 3 \cdot 60 = 460$ und in der zweiten Aufgabe $70 \cdot 3 + 4 \cdot 60 = 450$. Bei der ersten Aufgabe wird der große Zehner 7 mit dem großen Einer 4 und der kleine Zehner 6 mit dem kleinen Einer 3 multipliziert, in der zweiten Aufgabe ist es umgekehrt.

Kleinstes Ergebnis:
Als Aufgabe mit dem gesuchten kleinsten Ergebnis kommt nur $36 \cdot 47$ oder $37 \cdot 46$ in Frage, weil in diesem Fall die beiden kleineren Ziffern 3 und 4 an den Zehnerstellen angeordnet werden müssen. Hier zeigt das Malkreuz, dass $36 \cdot 47$ das kleinere Ergebnis hat:

·	40	7
30	1200	210
6	240	42

·	40	6
30	1200	180
7	280	42

Wieder treten die zwei Teilprodukte $30 \cdot 40 = 1200$ und $6 \cdot 7 = 42$ in beiden Aufgaben auf. Daneben findet man in der ersten Aufgabe $30 \cdot 7 + 6 \cdot 40 = 450$ und in der zweiten Aufgabe $30 \cdot 6 + 7 \cdot 40 = 460$. Man sieht also, dass es in diesem Fall besser ist, die größte Einerziffer 7 mit der kleineren Zehnerziffer 3 zu multiplizieren.

Zusammenfassen erhält man also: Größtes Ergebnis hat die Aufgabe $73 \cdot 64 = 4\,672$,
kleinstes Ergebnis die Aufgabe $36 \cdot 47 = 1\,692$.

b) Egal welche vier Ziffern man wählt:

- Größtes Ergebnis hat immer die Aufgabe

Größte Ziffer	Kleinste Ziffer	•	Zweitgrößte Ziffer	Drittgrößte Ziffer

- Kleinstes Ergebnis hat immer die Aufgabe:

Kleinste Ziffer	Zweitgrößte Ziffer	•	Drittgrößte Ziffer	Größte Ziffer

c) Der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Ergebnis ist

- am größten für die Ziffern 1, 2, 8, 9 (nämlich $91 \cdot 82 – 18 \cdot 29 = 6\,940$)
- am kleinsten für die Ziffern 1, 2, 3, 4 (nämlich $41 \cdot 32 – 13 \cdot 24 = 1\,000$)

Auch Aufgabe 2 kann später systematisch mit Hilfe von Variablen gelöst werden:

Sind $a < b < c < d$ vier der Größe nach geordnete Ziffern, so kommen als Multiplikationen mit dem gesuchten größten Ergebnis nur jene zwei Aufgaben in Frage, bei denen die beiden größeren Ziffern c und d an den Zehnerstellen und die beiden kleineren Ziffern a und b an den Einerstellen der Faktoren stehen:

$(10\,d + a) \cdot (10\,c + b) = 100\,cd + 10\,ac + 10\,bd + ab$
$(10\,d + b) \cdot (10\,c + a) = 100\,cd + 10\,bc + 10\,ad + ab$

Der Vergleich dieser Aufgaben zeigt, dass $(10\,d + a) \cdot (10\,c + b)$ das größere Ergebnis hat, denn:

$$\begin{aligned}(10\,d + a) \cdot (10\,c + b) - (10\,d + b) \cdot (10\,c + a) &= 10\,ac + 10\,bd - 10\,bc - 10\,ad = \\ &= 10 \cdot [bd - bc + ac - ad] = \\ &= 10 \cdot [b \cdot (d - c) - a \cdot (d - c)] = \\ &= 10 \cdot (b - a) \cdot (d - c) > 0 \qquad \text{für } a < b < c < d\end{aligned}$$

Analog dazu müssen bei der Aufgabe mit dem kleinsten Produkt die beiden kleineren Ziffern a und b an den Zehnerstellen und die beiden größeren Ziffern c und d an den Einerstellen stehen. Hier kommen also nur die beiden folgenden Aufgaben in Frage:

$(10\,a + c) \cdot (10\,b + d) = 100\,ab + 10\,bc + 10\,ad + cd$
$(10\,a + d) \cdot (10\,b + c) = 100\,ab + 10\,bd + 10\,ac + dc$

Hier zeigt der Vergleich der beiden Ergebnisse, dass die Aufgabe $(10\,a + c) \cdot (10\,b + d)$ das gesuchte kleinste Produkt hat:

$$\begin{aligned}(10\,a + c) \cdot (10\,b + d) - (10\,a + d) \cdot (10\,b + c) &= 10\,bc + 10\,ad - 10\,bd - 10\,ac = \\ &= 10 \cdot [bc - bd + ad - ac] = \\ &= 10 \cdot [b \cdot (c - d) - a \cdot (c - d)] = \\ &= 10 \cdot (b - a) \cdot (c - d) < 0 \qquad \text{für } a < b < c < d\end{aligned}$$

Für $a < b < c < d$ ist der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Multiplikationsergebnis gegeben durch:

$$\begin{aligned}&(10\,d + a) \cdot (10\,c + b) - (10\,a + c) \cdot (10\,b + d) = \\ &= 100\,cd + 10\,ac + 10\,bd + ab - 100\,ab - 10\,bc - 10\,ad - cd = \\ &= 99\,cd - 99\,ab + 10 \cdot [bd - bc + ac - ad] = \\ &= 99 \cdot (cd - ab) + 10 \cdot (b - a) \cdot (d - c)\end{aligned}$$

Man sieht sofort: Der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Ergebnis ist also dann am größten, wenn $(cd - ab)$ möglichst groß ist, dh. für $d = 9$, $c = 8$, $b = 2$ und $a = 1$.
Umgekehrt nimmt dieser Unterschied seinen kleinsten Wert für $d = 4$, $c = 3$, $a = 2$ und $b = 1$ an.

3 **a)** Größtes Ergebnis hat die Aufgabe $851 \cdot 93 = 79\,143$,
kleinstes Ergebnis die Aufgabe $389 \cdot 15 = 5\,835$.

b) Egal welche fünf Ziffern man wählt:

- Größtes Ergebnis hat immer die Aufgabe

Zweit-größte Ziffer	Dritt-größte Ziffer	Kleinste Ziffer	•	Größte Ziffer	Viert-größte Ziffer

- Kleinstes Ergebnis hat immer die Aufgabe:

Viert-größte Ziffer	Zweit-größte Ziffer	Größte Ziffer	•	Kleinste Ziffer	Dritt-größte Ziffer

Aufgabe 3 kann mit Hilfe von Variablen folgendermaßen auf Aufgabe 2 zurückgeführt werden:

Seien $a < b < c < d < e$ fünf der Größe nach geordnete Ziffern.

In der Aufgabe mit dem größten Ergebnis steht auf jeden Fall die kleinste Ziffer a an der Einerstelle der dreistelligen Zahl. Die Multiplikation mit dem größten Ergebnis hat also die Gestalt

$(10\,Z_1 + a) \cdot Z_2 = 10\,Z_1Z_2 + aZ_2$,

wobei Z_1 und Z_2 zweistellige Zahlen aus den Ziffern $b < c < d < e$ sind.

Um das größte Ergebnis zu erhalten, bilden wir aus den vier größeren Ziffern $b < c < d < e$ zwei zweistellige Zahlen Z_1 und Z_2 mit möglichst großem Produkt. Nach Aufgabe 2 ist das die Multiplikation $(10\,e + b) \cdot (10\,d + c)$. Wir wählen daher den größeren Faktor $10\,e + b$ dieser Multiplikation als Z_2 und den kleineren Faktor $10\,d + c$ als Z_1 und erhalten als Multiplikation mit dem größten Ergebnis:

$$[10 \cdot (10\,d + c) + a] \cdot (10\,e + b) = (100\,d + 10\,c + a) \cdot (10\,e + b)$$

In der Aufgabe mit dem kleinsten Ergebnis muss umgekehrt die größte Ziffer e an der Einerstelle der dreistelligen Zahl stehen. Diese Multiplikation kann somit geschrieben werden als

$$(10\,Z_1 + e) \cdot Z_2 = 10\,Z_1Z_2 + eZ_2,$$

wobei Z_1 und Z_2 zweistellige Zahlen aus den Ziffern $a < b < c < d$ sind. Nach Aufgabe 2 hat die Multiplikation $Z_1Z_2 = (10\,a + c) \cdot (10\,b + d)$ das kleinste Produkt. Wir setzen daher $Z_1 = 10\,b + d$ und $Z_2 = 10\,a + c$ und erhalten als Multiplikation mit dem kleinsten Ergebnis:

$$[10 \cdot (10\,b + d) + e] \cdot (10\,a + c) = (100\,b + 10\,d + e) \cdot (10\,a + c)$$

4

Größtes Ergebnis:

$$\begin{array}{r} 8\,742 \cdot 9 = 78\,678 \\ 531 \cdot 6 = 3\,186 \\ \hline 81\,864 \end{array}$$

Kleinstes Ergebnis:

$$\begin{array}{r} 2\,579 \cdot 1 = 2\,579 \\ 468 \cdot 3 = 1\,404 \\ \hline 3\,983 \end{array}$$

5

Größtes Ergebnis:

$$\begin{array}{r} 873 \cdot 96 = 83\,808 \\ 51 \cdot 42 = 2\,142 \\ \hline 85\,950 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{r} 873 \cdot 96 = 83\,808 \\ 42 \cdot 51 = 2\,142 \\ \hline 85\,950 \end{array}$$

Kleinstes Ergebnis:

$$\begin{array}{r} 159 \cdot 26 = 4\,134 \\ 37 \cdot 48 = 1\,776 \\ \hline 5\,910 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{r} 159 \cdot 26 = 4\,134 \\ 48 \cdot 37 = 1\,776 \\ \hline 5\,910 \end{array}$$

Lösungen zu Arbeitsblatt 3:
Divisionen mit möglichst großem/kleinem Ergebnis

1

Teilbar:	Größte Zahl:	Kleinste Zahl:
a) durch 2	986	124
b) durch 3	987	123
c) durch 4	986	124
d) durch 5	985	125
e) durch 6	984	126
f) durch 7	987	126
g) durch 8	984	128
h) durch 9	981	126

1 mit fünf Ziffern

a)	Größte Zahl:	Kleinste Zahl:
	9 876	1 234
	9 876	1 236
	9 876	1 236
	9 875	1 235
	9 876	1 236
	9 863	1 239
	9 872	1 248
	9 873	1 269

b)	Größte Zahl:	Kleinste Zahl:
	98 764	12 346
	98 763	12 345
	98 764	12 348
	98 765	12 345
	98 754	12 348
	98 763	12 348
	98 752	12 368
	98 721	12 348

2

a) Ergebnis möglichst groß: 86 534 : 2 = 43 267
Ergebnis möglichst klein: 23 456 : 8 = 2 932

Ziffern:	Ergebnis möglichst groß:	Ergebnis möglichst klein:
b) 2 3 4 5 6 9	96 534 : 2 = 48 267	23 596 : 4 = 5 899
c) 3 4 5 6 7 9	97 536 : 4 = 24 384	34 965 : 7 = 4 995
d)		
4 5 6 7 8 9	98 756 : 4 = 24 689	45 976 : 8 = 5 747
3 4 5 6 7 8	87 654 : 3 = 29 218	34 576 : 8 = 4 322
3 4 5 6 8 9	98 536 : 4 = 24 634	35 496 : 8 = 4 437
3 4 5 7 8 9	98 754 : 3 = 32 918	34 578 : 9 = 3 842
3 4 6 7 8 9	98 736 : 4 = 24 684	34 976 : 8 = 4 372
3 5 6 7 8 9	95 683 : 7 = 13 669	35 976 : 8 = 4 497
2 3 4 5 6 7	76 534 : 2 = 38 267	24 563 : 7 = 3 509
2 3 4 5 7 8	87 534 : 2 = 43 767	23 485 : 7 = 3 355
2 3 4 6 7 8	87 634 : 2 = 43 817	24 376 : 8 = 3 047
2 3 5 6 7 8	87 536 : 2 = 43 768	23 576 : 8 = 2 947
2 4 5 6 7 8	87 654 : 2 = 43 827	24 576 : 8 = 3 072
2 3 4 5 7 9	97 534 : 2 = 48 767	23 954 : 7 = 3 422
2 3 4 6 7 9	97 634 : 2 = 48 817	26 439 : 7 = 3 777
2 3 5 6 7 9	97 536 : 2 = 48 768	23 569 : 7 = 3 367
2 4 5 6 7 9	97 654 : 2 = 48 827	26 495 : 7 = 3 785
2 3 4 5 8 9	98 534 : 2 = 49 267	34 592 : 8 = 4 324
2 3 4 6 8 9	98 634 : 2 = 49 317	23 496 : 8 = 2 937
2 3 5 6 8 9	98 536 : 2 = 49 268	25 936 : 8 = 3 242
2 4 5 6 8 9	98 654 : 2 = 49 327	25 496 : 8 = 3 187
2 3 4 7 8 9	98 734 : 2 = 49 367	23 849 : 7 = 3 407
2 3 5 7 8 9	97 538 : 2 = 48 769	25 389 : 7 = 3 627
2 4 5 7 8 9	98 754 : 2 = 49 377	24 598 : 7 = 3 514
2 3 6 7 8 9	98 736 : 2 = 49 368	23 976 : 8 = 2 997
2 4 6 7 8 9	98 764 : 2 = 49 382	24 678 : 9 = 2 742
2 5 6 7 8 9	98 756 : 2 = 49 378	25 976 : 8 = 3 247