Jürgen Roth

Max Bill: Strahlung aus Rot

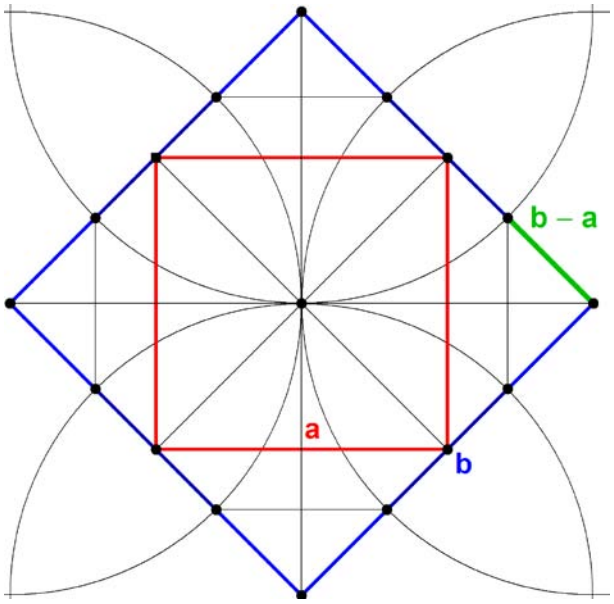
Berechnung der Flächeninhalte der Teilflächen

Die Diagonale d des großen Quadrats ist doppelt so lang, wie die Kantenlänge a des kleinen Quadrats. (Warum?)

$$d = 2a$$

b ist die Kantenlänge des großen Quadrats und gleichzeitig die Länge der Diagonalen des kleinen Quadrats. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$b = \sqrt{a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{2}, \quad \text{d.h.} \quad a = \frac{b}{\sqrt{2}}$$



Der Abbildung lässt sich entnehmen (vgl. die eingezeichneten Kreisbögen mit Radius a), dass die grüne Kathete des kleinen rechtwinkligen Dreiecks folgende Länge besitzt:

$$b - a = \begin{cases} a \cdot \sqrt{2} - a = (\sqrt{2} - 1) \cdot a \\ b - \frac{b}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot b \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Flächeninhalte für die Teilflächen des Kunstwerks (in Abhängigkeit von a bzw. b):

- Flächeninhalt des kleinen Quadrats: $A_{kleines\ Quadrat} = \begin{cases} a^2 \\ \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{b^2}{2} \end{cases}$
- Flächeninhalt des großen Quadrats: $A_{großes\ Quadrat} = \begin{cases} (a \cdot \sqrt{2})^2 = 2a^2 \\ b^2 \end{cases}$
- Flächeninhalt des kleinen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks:

$$A_{kleines\ Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot (b-a)^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot (2 - 2\sqrt{2} + 1) \cdot a^2 = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot a^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot b^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot b^2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot b^2 \end{cases}$$

- Flächeninhalt des Achtecks:

$$A_{Achteck} = A_{großes\ Quadrat} - 4 \cdot A_{kleines\ Dreieck} = \begin{cases} 2a^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot a^2 = (4\sqrt{2} - 4) \cdot a^2 \\ b^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot b^2 = (2\sqrt{2} - 2) \cdot b^2 \end{cases}$$

Damit erhält man folgende Werte für die Flächeninhalte in Abhängigkeit von der jeweils im Bild vorgegebenen Seitenlänge:

$a = 1$	$\Rightarrow$	$A_{kleines\ Quadrat} = 1;$	$A_{großes\ Quadrat} = 2;$	$A_{Achteck} = 4\sqrt{2} - 4 \approx 1{,}66$
$a = 5\ cm$	$\Rightarrow$	$A_{kleines\ Quadrat} = 25\ cm^2;$	$A_{großes\ Quadrat} = 50\ cm^2;$	$A_{Achteck} \approx 41{,}42\ cm^2$
$b = 1\ m$	$\Rightarrow$	$A_{kleines\ Quadrat} = 0{,}5\ m^2;$	$A_{großes\ Quadrat} = 1\ m^2;$	$A_{Achteck} \approx 0{,}83\ m^2$