Version B

Bremsvorgänge und Restgeschwindigkeiten

Im Folgenden geht es um 3 aufeinander folgende Arbeitsblätter. Beim Arbeitsblatt A sollen die Schülerinnen und Schüler selbständig die Formel für die Bremszeit $t_B = \frac{v_0}{b}$, die Funktion für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit $v(t) = v_0 - b \cdot t$ und die Formel für den Bremsweg $s_B = \frac{v_0^2}{2b}$ erarbeiten. Das Arbeitsblatt hat so gut wie keine Voraussetzungen, es kann mit Schülern der 9. Schulstufe behandelt werden.

Wenn Schülerinnen und Schüler diese Formeln bereits kennen (z. B. bereits in einer höheren Klassenstufe: 10, 11, 12), dann kann man natürlich bereits mit Arbeitsblatt B beginnen.

Das zweite Arbeitsblatt B hat die Geschwindigkeit in Abhängigkeit des zurückgelegten Weges zum Thema. Neben anderen Aufgaben sollen Schülerinnen und Schüler die zugehörige Formel $v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2bs}$ erarbeiten.

Nachdem diese Zusammenhänge gefunden wurden, sollen Schülerinnen und Schüler (als „Ziel“) im Arbeitsblatt C mit den unerwarteten Konsequenzen von überhöhter Geschwindigkeit konfrontiert werden. Dies auf eine Art, die viel aufregender ist als zu sagen: „Wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt, vervierfacht sich der Bremsweg.“ Diese zentrale Botschaft kann zwar schon aus der Bremswegformel $s_B = \frac{v_0^2}{2b}$ gewonnen werden, aber die Gefahr dabei ist, dass die hinter ihr steckende Dramatik nicht voll gesehen wird („dies ist halt eine Formel zum Lernen, wie andere auch“).

Schreibweise: Möglicherweise ist es für junge Schülerinnen und Schüler günstiger, für die Anfangsgeschwindigkeiten v_0 und v_0^* im Arbeitsblatt C einfacher v_1 und v_2 zu schreiben oder auf Indices ganz zu verzichten: u und v?

Anmerkung: Diese Arbeitsblätter sind im Rahmen des EU-Projektes „Developing Quality in Mathematics Education 2 (DQME 2)“ entstanden. Sie beziehen sich hier auf den Aufsatz von H. Humenberger und J.-H. Müller **„Wie schätzt du die Verkehrssituation ein?“** im Heft mathematiklehren 153 (2009), 50 – 55.

Bemerkungen, mögliche Lösungen etc. sind hier nicht für Schülerinnen und Schüler, sondern für Lehrkräfte gedacht.

A) Bremsweg

1) Es gibt zwei übliche Einheiten für Geschwindigkeiten: km/h und m/s.

a) Welche Vor- bzw. Nachteile haben diese jeweils?

b) Nimm einige typische Geschwindigkeiten in km/h und rechne sie in m/s um (und umgekehrt)

km/h	30	50	70	80	100	130					
m/s							5	10	20	30	45

c) Gib jeweils eine allgemeine Formel für die Umrechnung an.

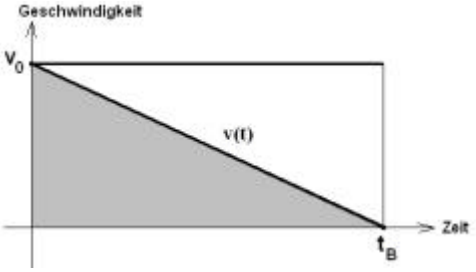
2) Wenn man mit konstantem Druck bremst, wird die Anfangsgeschwindigkeit v_0 zeitlich gesehen gleichmäßig kleiner. In Österreich müssen zugelassene Autobremsen die Geschwindigkeit pro Sekunde um mindestens 5 m/s verringern. Diesen Wert nennt man „Bremsverzögerung“ (hier: b = 5 m/s/s = 5 m/s²).

a) Jede Sekunde soll die Geschwindigkeit um 5 m/s weniger werden (b = 5 m/s/s = 5 m/s²). Wie lange wird die Bremszeit t_B bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit sein?

v_0 [m/s]	10	15	18	22	28	35
t_B [s]						

b) Kannst du eine allgemeine Formel angeben, mit der man die Bremszeit t_B berechnen kann (geg. Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Bremsverzögerung b)?

3) Wenn man weder bremst noch beschleunigt, wird die Geschwindigkeit konstant v_0 bleiben. Wenn man gleichmäßig bremst, wird die Geschwindigkeit (zeitlich) gleichmäßig kleiner werden. In der nebenstehenden Abbildung siehst du die v-t-Graphen für beide Fälle:



a) Gib die zugehörige Funktionsgleichung für $v(t)$ für $0 \le t \le t_B$ im Fall des gleichmäßigen Bremsens an. Was bedeutet der konstante Abfall von $v(t)$, welchem Wert entspricht diese negative Steigung?

b) Welcher Weg wird während der Zeit t_B in den Fällen (1) konstante Geschwindigkeit (2) gleichmäßiges Bremsen zurückgelegt? Welche Beziehung besteht zwischen diesen beiden Wegen? Kannst du eine Formel für den Bremsweg s_B angeben in Abhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Bremsverzögerung b? [Hinweis: Bei konstanter Geschwindigkeit ist der Weg in einem v-t-Graph durch die Fläche unter diesem gegeben; erkläre warum! Versuche, dies auch bei nicht konstanter Geschwindigkeit plausibel zu machen: unterteile die Zeit in sehr viele kurze Intervalle; in diesen kann die Geschwindigkeit als näherungsweise konstant betrachtet werden. Führe diese Begründung mit eigenen Worten weiter.]

c) Nimm zwei vernünftige Werte für die Bremsverzögerung b_1 und b_2 an und vervollständige folgende Tabelle. Um welchen Faktor erhöhen sich die Anfangsgeschwindigkeiten und die zugehörigen Bremswege? Vergleiche! Was beobachtest du? Gib eine Begründung dafür!

v_0	15 m/s	30 m/s	45 m/s			
s_B				10 m	40 m	90 m

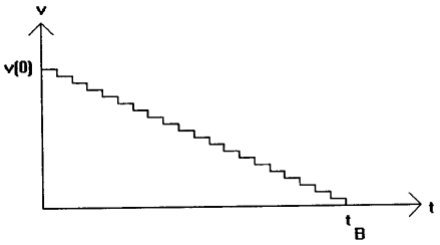
Mögliche Lösungen:

2b) $t_B = \frac{v_0}{b}$; aufpassen auf die Einheiten: wenn t_B in Sekunden herauskommen soll, muss man m/s für v_0 und m/s² für b verwenden.

3a) $v(t) = v_0 - b \cdot t$; die konstante negative Steigung entspricht der Bremsverzögerung b.

3b) Der während des Bremsens zurückgelegte Weg s_B ("Bremsweg") ist die Fläche des grauen Dreiecks: $\boxed{s_B} = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t_B = \boxed{\frac{v_0^2}{2b}}$. Natürlich müssen die verwendeten Einheiten für v_0 und b kompatibel sein.

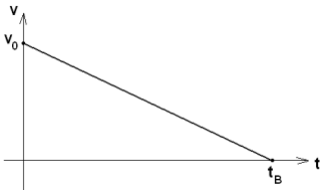
Begründung, dass die Fläche unter einem v-t-Graph als Weg interpretiert werden kann:
Über ganz kleine Zeitintervalle wird die Geschwindigkeit konstant gehalten; die kleinen Rechtecksflächen sind dann naturgemäß Wege (konstante Geschwindigkeit $\times$ Zeit) und ihre Summe nähert sich bei feiner werdender Unterteilung der Dreiecksfläche an. → Es ist sehr plausibel, dass der Flächeninhalt unter dem v-t-Graph der Weg ist.



3c) $v_0 \to 2 \cdot v_0 \quad \Leftrightarrow \quad s_B \to 4 \cdot s_B \quad ; \quad v_0 \to 3 \cdot v_0 \quad \Leftrightarrow \quad s_B \to 9 \cdot s_B$

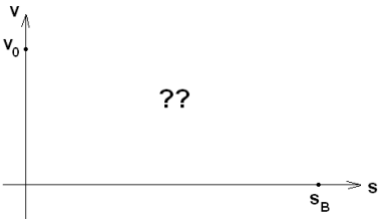
B) Geschwindigkeit in Abhängigkeit des zurückgelegten Weges

Ein Auto fährt mit $v_0 = 70$ km/h, der Lenker sieht plötzlich ein Hindernis und beginnt zu bremsen, so dass die Geschwindigkeit dabei gleichmäßig pro Sekunde um 10 km/h geringer wird. Der Graph jener Funktion, die die Geschwindigkeit zu einem bestimmten *Zeitpunkt* des Bremsvorganges zeigt, sieht dann so aus:



1) Bestimme die Bremszeit t_B und den Bremsweg s_B (z. B. Formeln von A).

2) Wie wird sich die **Geschwindigkeit** des Autos **in Abhängigkeit des zurückgelegten Weges** entwickeln?



a) Skizziere zunächst („Freihand“) die Entwicklung der Geschwindigkeit $v(s)$ nur grob, so wie du glaubst, dass sie verlaufen wird (ohne zu rechnen).

b) Nimm in jeder Sekunde eine sinnvolle Durchschnittsgeschwindigkeit an und berechne somit die zurückgelegten Wege; damit kannst du $v(s)$ schon genauer zeichnen – noch ohne expliziten Funktionsterm Welche Form hat dieser Graph ungefähr?

c) Betrachte einen Bremsvorgang von der Geschwindigkeit v_0 → stopp; was bedeutet dabei $\frac{v_0^2}{2b}$? Was bedeutet $\frac{v^2}{2b}$ bei einem Bremsvorgang v $(< v_0)$ → stopp? Was bedeutet die Differenz $s = \frac{v_0^2}{2b} - \frac{v^2}{2b}$?

Wenn man diese Gleichung nach v auflöst, erhält man den Funktionsterm für die Geschwindigkeit v (Anfangsgeschwindigkeit v_0) in Abhängigkeit des zurückgelegten Weges s: $v = v(s)$ – erkläre warum!

d) Plotte den Funktionsgraph $v(s)$ von c) mit einem Computer – vergleiche mit der Freihandzeichnung aus a) bzw. mit der Näherungsmethode in b).

e) Welcher Bruchteil der Anfangsgeschwindigkeit ist nach ¾ des Bremsweges abgebaut? Nach welchem Bruchteil des Bremsweges hat man ¾ der Anfangsgeschwindigkeit abgebaut? Wird die Geschwindigkeit also eher zu Beginn oder eher zum Schluss des Bremsweges abgebaut?

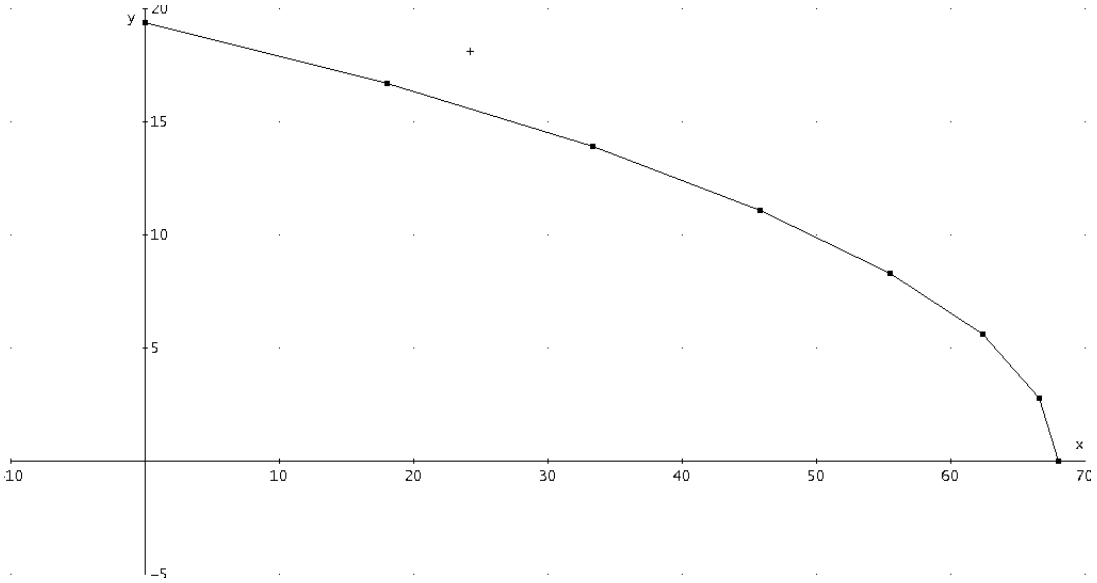
Mögliche Lösungen

1) Aufpassen auf die Einheiten; es ist besser m und s statt km und h zu verwenden, weil die Geschwindigkeitsreduzierung pro *Sekunde* gegeben ist. 70 km/h ≈ 19,4 m/s; 10 km/h ≈ 2,8 m/s; Mit den Formeln von Arbeitsblatt A erhält man: $t_B = \frac{v_0}{b} = 7\text{s}$ und $s_B = \frac{v_0^2}{2b} \approx 67{,}2$ m.

2b) Nach 1 s hat man eine Geschwindigkeit von 60 km/h≈16,7 m/s; eine sinnvolle „Durchschnittsgeschwindigkeit“ während dieser ersten Sekunde ist daher 65 km/h≈18 m/s, so dass der zurückgelegte Weg in dieser ersten Sekunde ca. 18 m beträgt. Analog kann man in den folgenden Sekunden fortfahren:

Zeit [s]	0	1	2	3	4	5	6	7
Geschw. [km/h]	70	60	50	40	30	20	10	0
Geschw. [m/s]	19,4	16,7	13,9	11,1	8,3	5,6	2,8	0
Gesamtweg [m]	0	18	33,3	45,8	55,5	62,4	66,6	68

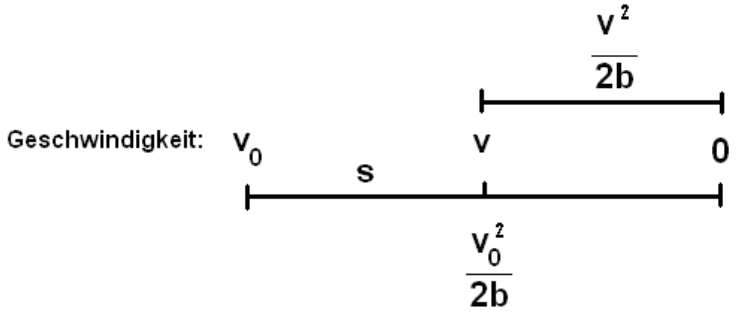
Zeichnet man nun mit den letzten beiden Zeilen dieser Tabelle den ungefähren Graphen, so ergibt sich mit den Punkten $(0;19{,}4),\ldots,(68;0)$:



Daraus sieht man schon, dass der Graph nicht linear, sondern „nach oben gewölbt“ ist.

2c) Bedeutung von $\frac{v_0^2}{2b}$: Bremsweg bei Anfangsgeschwindigkeit v_0

Bedeutung von $\frac{v^2}{2b}$: Bremsweg bei Anfangsgeschwindigkeit $v < v_0$.

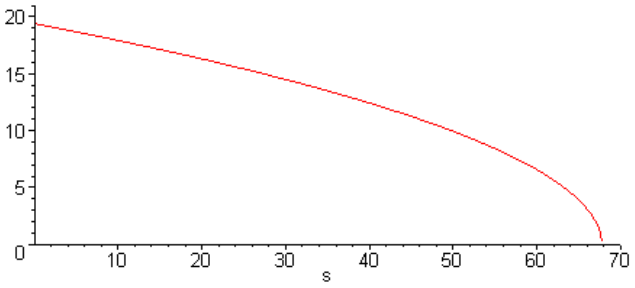


Bedeutung der Differenz $s = \frac{v_0^2}{2b} - \frac{v^2}{2b}$: benötigter Weg für die Geschwindigkeitsreduktion $v_0 \to v$. Auflösung nach v ergibt $v = v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2bs}$.

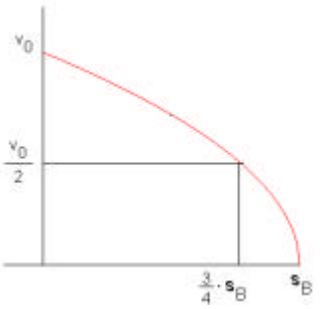
2d)

$v_0 = \frac{70}{3.6} \approx 19.4$ m/s; $b \approx 2.8$ m/s²;

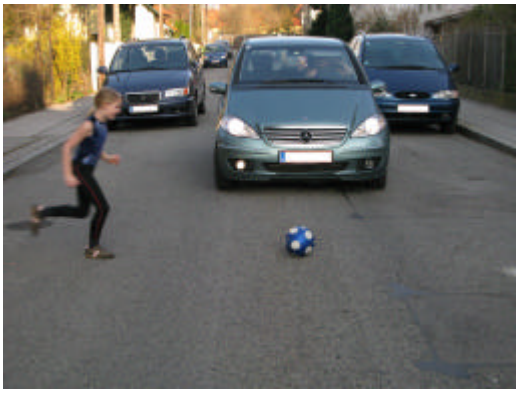
Graph von $v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2bs}$:



2e) Nach ¾ des Bremsweges ist nur die Hälfte der Anfangsgeschwindigkeit abgebaut. Um ¾ der Anfangsgeschwindigkeit abzubauen, ist fast der ganze Bremsweg, genau 15/16 davon nötig. D. h. der Großteil der Geschwindigkeit wird beim Bremsen erst im letzten Teil des Bremsweges abgebaut, zu Beginn wird nur relativ wenig abgebaut! Dies sieht man auch unmittelbar aus den Graphen („Wurzelfunktion“) und sollte man bei Bremsvorgängen im Straßenverkehr immer bedenken! Dies ist sicher eine zentrale Botschaft von Arbeitsblatt B. Für ein zugehöriges Verständnis steht primär der Verlauf des Graphen von $v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2bs}$ (Wurzelfunktion, Parabel) und erst sekundär konkrete Rechnungen im Mittelpunkt.



C) Restgeschwindigkeit – Version 1



Ein Auto fährt in einer 30er-Zone mit 30 km/h. Ein anderes Auto überholt dieses mit 50 km/h. Als die beiden Autos genau nebeneinander sind, geht ein Kind ohne zu schauen auf die Straße (z. B. um einen Ball zu holen). Die Autos haben gleich starke Bremsen und die Fahrer reagieren auch gleich schnell. Das Auto mit 30 km/h kommt noch gerade vor dem Kind zu stehen. Welche Restgeschwindigkeit hat das andere Auto an dieser Stelle?

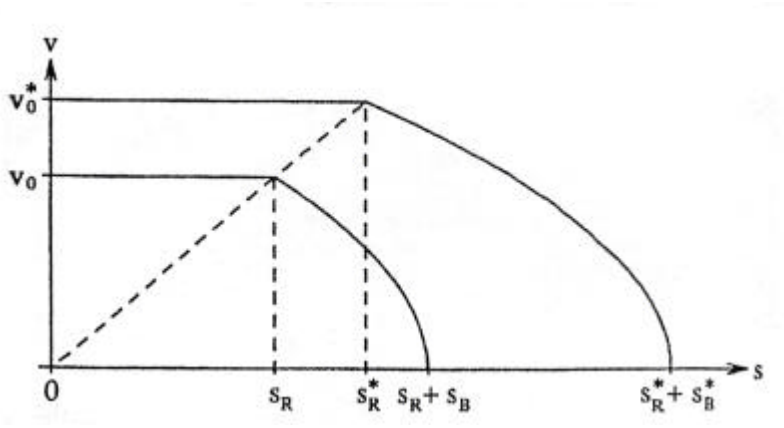
1) Schätze die Restgeschwindigkeit! Schätze die jeweilige Restgeschwindigkeit auch bei anderen Daten: wenn die Geschwindigkeiten (50km/h, 70 km/h) bzw. (70km/h, 100 km/h) – statt (30km/h, 50 km/h) – betragen!

2) Im obigen Fall war die Restgeschwindigkeit mehr als 40 km/h; kann das stimmen? Eine solche Auffahrgeschwindigkeit ist in den meisten Fällen tödlich für ein Kind. Nimm an, dass beide Autos an derselben Stelle zu bremsen beginnen. Zeichne die Graphen der beiden Geschwindigkeitsfunktionen (v in Abhängigkeit von s) in ein Bild und lies die Restgeschwindigkeit ungefähr ab! (Analog für die anderen Angaben in 1). Kannst du die Graphen so plotten, dass die Geschwindigkeiten in km/h und die Distanzen in m gemessen werden (besserer Überblick)?

3) In Wirklichkeit werden die beiden Bremsvorgänge zwar zur selben Zeit, aber nicht an derselben Stelle beginnen (wie wir in 2) angenommen haben) – erkläre warum! Das macht die Sache mit der Restgeschwindigkeit sogar noch schlimmer – der obige Wert (abgelesen, ≈ 40 km/h) ist daher eigentlich ein nur unrealistisches Minimum für die Restgeschwindigkeit! Ein Maximum im obigen Fall ist 50 km/h (warum?).

4) Finde das unrealistische Minimum und das Maximum für den allgemeinen Fall (abhängig von den Anfangsgeschwindigkeiten v_0, v_0^* und der Bremsverzögerung b). Was fällt dir bzgl. des Minimums und b auf?

5) Berücksichtige nun die unterschiedlichen Reaktionswege. v_0 bezeichnet die kleinere, v_0^* die größere Anfangsgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeitsgraphen (abhängig von s) sehen dann ca. so wie hier aus. Erkläre die Graphen! Was bedeuten hier s_R und s_R^*? Was bedeuten $s_R + s_B$ und $s_R^* + s_B^*$? Gib dafür einfache Formeln an! Warum sind die "Eckpunkte" der Graphen auf derselben Ursprungsgeraden (gestrichelt)? Berechne die Restgeschwindigkeit für $v_0 = 30\text{km/h}$, $v_0^* = 50\text{km/h}$, indem du eine vernünftige Reaktionszeit annimmst in zwei verschiedenen Fällen: (1) beide Autos haben sehr schlechte Bremsen: $b = 3\text{m/s}^2$ (2) beide Autos haben gute Bremsen: $b = 9\text{m/s}^2$.



6) Nimm eine Reaktionszeit von $t_R = 1s$ an und allgemeine Werte für die Anfangsgeschwindigkeiten (v_0, v_0^*). Für welche Werte der Bremsverzögerung b hat das schnellere Auto noch immer seine **volle Anfangsgeschwindigkeit** als Restgeschwindigkeit? Sind diese Werte von b realistisch – kann es "volle Anfangsgeschwindigkeit" in den obigen Situationen geben:

-) $v_0 = 30$ km/h, $v_0^* = 50$ km/h

-) $v_0 = 50$ km/h, $v_0^* = 70$ km/h

-) $v_0 = 70$ km/h, $v_0^* = 100$ km/h

Bemerkungen zu Arbeitsblatt C

Das Hauptaugenmerk liegt dabei nicht auf Experimente, Modellieren etc., sondern primär auf: Durch verständiges Umgehen mit Graphen, Funktionen, Funktionsterme sollen die Schülerinnen und Schüler die dramatischen Phänomene bzgl. Restgeschwindigkeiten realisieren!

Voraussetzungen:

Hier wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler durch den Physikunterricht oder durch das Arbeitsblatt B Bescheid wissen über:

1) Was ist die Bremsverzögerung b?

2) Bremsweg: $s_B = \frac{v_0^2}{2b}$

3) Formel für die Restgeschwindigkeiten: $v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2bs}$

Bemerkung 1: Das Ziel ist hier, das Schülerinnen und Schüler die wichtigen und schlagenden Phänomene bzgl. Restgeschwindigkeiten kennen lernen. Es ist unbestritten, dass hier neben dem Arbeiten mit Graphen auch viel mit Formeln hantiert werden muss (innermathematisch!), aber durch die wichtige dahintersteckende Botschaft wird der ebenso wichtige Bezug zur Realität sicher hergestellt.

Bemerkung 2: Bei den Schätzungen wird die Restgeschwindigkeit sicher (meist viel!) zu niedrig angegeben. Die nachfolgenden Überlegungen können einem da vielleicht erst die Augen öffnen! Meist wird die Tatsache „Der Bremsweg wächst quadratisch mit der Geschwindigkeit“ ($s_B = \frac{v_0^2}{2b}$) einfach ohne Staunen hingenommen, auch wenn man anführt: „Der Bremsweg verdoppelt (ver-4-facht) sich bei der 1,4-fachen (doppelten) Ausgangsgeschwindigkeit.“
Dies nimmt man oft einfach so zur Kenntnis, wie halt andere Formeln auch. Die vorangegangenen bzw. folgenden Überlegungen mit den Restgeschwindigkeiten an bestimmten Stellen führen die Dramatik bei weitem besser vor Augen (instruktiver, schlagender)!

Die Phänomene sind eine gute Gelegenheit, fächerübergreifend mit Physik zu arbeiten:

- Mathematik kann helfen, bestimmte Phänomene zu erklären und zu verstehen
- Mathematik ist nützlich
- Verkehrserziehung
- Verständiger Umgang mit den Graphen von Wurzelfunktionen

Mögliche Lösungen

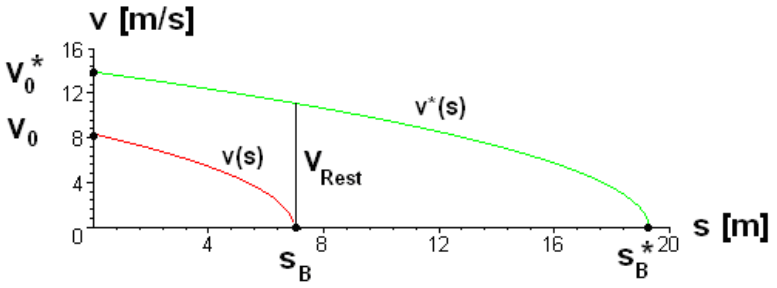
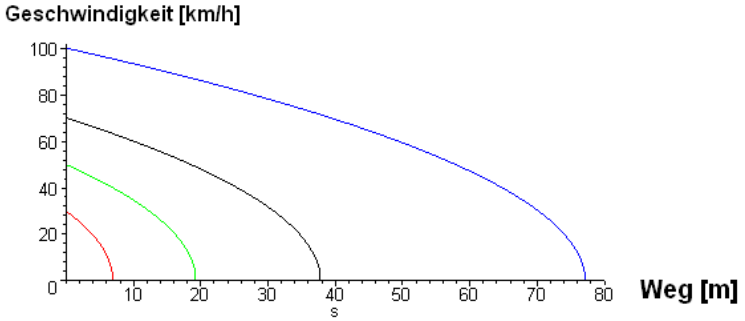


Abb. 1

2) Viele werden „mehr als 40 km/h“ für ziemlich übertrieben halten; aber schon die Graphen der Geschwindigkeitsfunktionen $v(s)=\sqrt{v_0^2-2bs}$ und $v^*(s)=\sqrt{v_0^{*2}-2bs}$ [$v_0=30$ km/h $\approx 8{,}3$ m/s, $v_0^*=50$ km/h $\approx 13{,}9$ m/s; Schüler müssen einen Wert für die Bremsverzögerung b annehmen, z. B. $b=5$ m/s²] lassen schon erahnen, dass die Restgeschwindigkeit des schnelleren Fahrers noch nahe seiner Ausgangsgeschwindigkeit liegen kann, was a priori ja sicher nicht so klar ist.

In einem ersten Schritt kann man rein graphisch arbeiten: Graphen der Funktionen $v(s)$ und $v^*(s)$. Da die Schülerinnen und Schüler ja einen Wert für b *annehmen* mussten, liegt es nahe, es auch mit anderen Werten von b zu probieren (sollte das nicht der Fall sein, könnte ein entsprechender Hinweis von der Lehrperson kommen: „probiere mal andere Werte von b“). Wenn man verschiedene Werte von b probiert, wird man feststellen, dass die Restgeschwindigkeit (näherungsweise an den Graphen abgelesen) immer dieselbe zu sein scheint (unabhängig von b). ca. 11 m/s bzw. 40 km/h. Dies bedeutet, dass “mehr als 40 km/h” sicher stimmen kann.

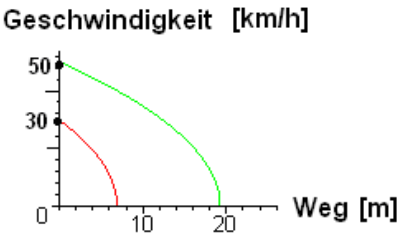
Eine Darstellung bei allen 4 gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten 30 km/h, 50 km/h, 70 km/h und 100 km/h sieht ca. so aus (wieder $b=5$ m/s²; hier zur besseren Übersichtlichkeit die Geschwindigkeiten in km/h):



Die anderen (aus den Graphen näherungsweise abgelesenen) Restgeschwindigkeiten betragen:
(50 km/h, 70 km/h):
Restgeschwindigkeit ≈ 50 km/h
(70 km/h, 100 km/h):
Restgeschwindigkeit ≈ 70 km/h

Dies ist sicher ein unerwartetes und erstaunliches Resultat: Die Restgeschwindigkeit des schnelleren Autos ist höher als die ungebremste Geschwindigkeit des langsameren! D. h. beim Kind hat das schnellere Auto eine höhere Geschwindigkeit als wenn das langsamere Auto gar nicht gebremst hätte! Allein durch solche Graphen für die Restgeschwindigkeiten und zugehörige Näherungswerte (noch ganz ohne Rechnung) kann die Dramatik der Folgen überhöhter Geschwindigkeiten besser zu Tage treten als durch bloße Formeln wie $s_B = v_0^2/(2b)$.

3) Obwohl die Reaktions*zeit* für beide gleich ist, sind die Reaktions*wege* verschieden, das schnellere Auto beginnt erst weiter vorne zu bremsen als das langsamere. Daher ist die Restgeschwindigkeit in Wirklichkeit sogar noch höher als in solchen Graphen abgelesen (in solchen Graphen nimmt man ja gleiche Stelle des Bremsbeginns an). Weil die Anfangsgeschwindigkeit des schnelleren Autos 50 km/h beträgt, kann seine Restgeschwindigkeit auch nicht höher sein!



Daher ist das mögliche Intervall für die Restgeschwindigkeit hier $(40\text{km/h};\ 50\text{kmh}]$.

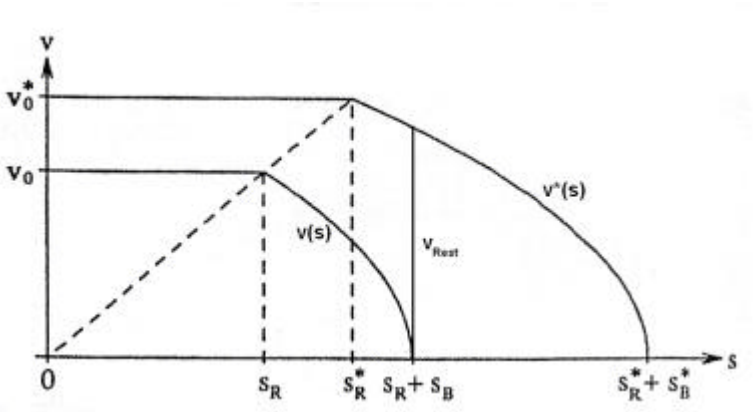
4) Es gibt zwei verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten: $v_0^* > v_0$; für das unrealistische Minimum der Restgeschwindigkeit brauchen wir den Funktionswert $v^*(s)$ an der Stelle $s_B = \frac{v_0^2}{2b}$: $v_{\text{Rest}} = v^*(s_B) = v^*\left(\frac{v_0^2}{2b}\right) = \sqrt{v_0^{*2} - 2b\frac{v_0^2}{2b}} = \sqrt{v_0^{*2} - v_0^2}$

Dies ist die mathematische Erklärung für das oben beobachtete Phänomen: Das unrealistische Minimum der Restgeschwindigkeit ist unabhängig von der Bremsverzögerung b.

Das Maximum ist im allgemeinen Fall natürlich durch die höhere Anfangsgeschwindigkeit v_0^* gegeben. Daher ist der mögliche Bereich für die Restgeschwindigkeit das Intervall $\left(\sqrt{v_0^{*2} - v_0^2}\ ;\ v_0^*\right]$.

Mit $v_0 = 50$ km/h, $v_0^* = 70$ km/h: $v_{\text{Rest}} \in (49\text{km/h};\ 70\text{km/h}]$.
Mit $v_0 = 70$ km/h, $v_0^* = 100$ km/h: $v_{\text{Rest}} \in (71\text{km/h};100\text{km/h}]$.

5) Wegen des längeren Reaktionsweges des schnelleren Autos beginnt dieses erst weiter vorne zu bremsen. s_R und s_R^* sind die verschiedenen Reaktionswege, $s_R + s_B$ und $s_R^* + s_B^*$ sind die Anhaltewege (Reaktionsweg + Bremsweg). Die Eckpunkte des Graphen liegen auf einer Ursprungsgeraden, weil die Reaktionszeiten als gleich vorausgesetzt wurden.



Formeln: $s_R = v_0 \cdot t_R$, $s_R^* = v_0^* \cdot t_R$, $s_R + s_B = v_0 \cdot t_R + \frac{v_0^2}{2b}$, $s_R^* + s_B^* = v_0^* \cdot t_R + \frac{v_0^{*2}}{2b}$

Wir verwenden hier nicht "stückweise definierte Funktionen" und auch nicht die algebraische Berücksichtigung der Horizontalverschiebung im Funktionsterm, weil Schülerinnen und Schüler bei der selbständigen Arbeit dies wahrscheinlich auch nicht machen werden. Wenn man auf eine allgemeine Formel für die Restgeschwindigkeit abzielt, kann man hier stückweise definierte Funktionen benützen, aber dieser Weg ist natürlich „formaler und algebraischer".

Ergebnis: $v_{\text{Rest}} = \begin{cases} \sqrt{v_0^{*2} - v_0^2 + 2bt_R(v_0^* - v_0)} & \text{für } s_R + s_B > s_R^* \\ v_0^* & \text{für } s_R + s_B \le s_R^* \end{cases}$.

Wir nehmen eine Reaktionszeit an von $t_R = 1s$ ($v_0 = 30$ km/h, $v_0^* = 50$ km/h).

(1) $b = 3\text{m/s}^2$: $s_R + s_B \approx 19{,}9\text{m}$; davon müssen wir den längeren Reaktionsweg $s_R^* \approx 13{,}9\text{m}$ subtrahieren und an dieser Stelle dann die höhere Geschwindigkeitsfunktion auswerten: Für die Restgeschwindigkeit brauchen wir den Funktionswert von $v^*(s) = \sqrt{v_0^{*2} - 2bs}$ an der Stelle $s \approx 19{,}9 - 13{,}9 = 6\text{m}$: $v_{\text{Rest}} \approx v^*(6) \approx 12{,}5\text{m/s} = 45\text{km/h}$.

(2) $b = 9\text{m/s}^2$: $s_R + s_B \approx 12{,}2\text{m}$; der Reaktionsweg $s_R^* \approx 13{,}9\text{m}$ des schnelleren Autos ist hier sogar länger als der Anhalteweg $s_R + s_B \approx 12{,}2\text{m}$ des langsameren Autos. Daher ist klar, dass hier die Restgeschwindigkeit noch die volle Anfangsgeschwindigkeit ist (50 km/h, „ungebremst"!)

6) "Volle Anfangsgeschwindigkeit" als Restgeschwindigkeit passiert, wenn der Anhalteweg des langsameren Autos nicht größer ist als der Reaktionsweg des schnelleren: $\underbrace{v_0 \cdot t_R + \frac{v_0^2}{2b}}_{s_R + s_B} \le \underbrace{v_0^* \cdot t_R}_{s_R^*}$. Mit $t_R = 1s$ ergibt die Lösung nach b: $b \ge \frac{v_0^2}{2(v_0^* - v_0)}$

-) $v_0 = 30$ km/h, $v_0^* = 50$ km/h: $b \ge 6.25\text{m/s}^2$ realistisch!

-) $v_0 = 50$ km/h, $v_0^* = 70$ km/h: $b \ge 17.36\ \text{m/s}^2$ unrealistisch

-) $v_0 = 70$ km/h, $v_0^* = 100$ km/h: $b \ge 22.69\ \text{m/s}^2$ unrealistisch

Bremsverzögerungen:
Asphalt, Beton (trocken): $b \approx$ 6.0 – 9.0 m/s² Asphalt (nass): $b \approx$ 5.0 – 7.0 m/s²

Dies bedeutet, dass es bei Anfangsgeschwindigkeiten von 30 km/h und 50 km/h sehr gut möglich ist, dass das schnellere Auto noch gar nicht zu bremsen begonnen hat an jener Stelle, an der das langsamere zum Stehen kommt!

C) Restgeschwindigkeit – Version 2

Ein Auto fährt in einer 30er-Zone mit 30 km/h. Ein anderes Auto überholt dieses mit 50 km/h. Als die beiden Autos genau nebeneinander sind, geht ein Kind ohne zu schauen auf die Straße (z. B. um einen Ball zu holen). Die Autos haben gleich starke Bremsen und die Fahrer reagieren auch gleich schnell. Das Auto mit 30 km/h kommt noch gerade vor dem Kind zu stehen. Welche Restgeschwindigkeit hat das andere Auto an dieser Stelle?

1) Schätze die Restgeschwindigkeit! Schätze die jeweilige Restgeschwindigkeit auch bei anderen Daten: wenn die Geschwindigkeiten (50km/h, 70 km/h) bzw. (70km/h, 100 km/h) – statt (30km/h, 50 km/h) – betragen!

2) Finde einen begründeten Wert für die Restgeschwindigkeit nicht nur durch Schätzung!

3) Wie kann man im allgemeinen Fall begründete Werte für die Restgeschwindigkeit angeben? Anfangsgeschwindigkeiten wie in 1) oder mit Variablen: v_0, v_0^*.

Bemerkung: Die Version 2 ist viel offener. Die konkreten Fragen der Version 1 leiten in einer gewissen Weise zu einem gewissen Ergebnis. Bei der Version 1 arbeiten die Schülerinnen und Schüler auch selbständig, aber gleichzeitig werden sie durch die Struktur der Aufgaben angeleitet. Welche Version die besser geeignete ist, hängt von vielen Umständen ab (Lehrkraft, Klasse, Gewöhnung an sehr offene Aufgaben, . . .). In Version 2 müssen die Schülerinnen und Schüler selbständig Wege finden, wobei natürlich nicht dieselben Resultate wie bei Version 1 erwartet werden können.