Der Parabolspiegel

von Dietrich Meyer

In der optischen und der Radioatronomie ist es von großer Bedeutung, möglichst präzise Spiegel zu verwenden. Einfache sphärische Spiegel erfüllen diese Anforderungen nicht. Der folgende Aufsatz zeigt, daß dazu Parabolspiegel erforderlich sind. Im Unterricht kann er in der 9/10. Klasse als Anwendung der Parabel eingesetzt werden.

In der geometrischen Optik gibt es folgendes Problem: Ist ein Hohlspiegel sphärisch gekrümmt wie in **Abb. 2**, so treffen sich laut Reflexionsgesetz nur "achsennahe" Strahlen (wie Strahl 1 und Strahl 1' in **Abb. 2**) im Brennpunkt F_1. Eine Konstruktion nach **Abb. 2** zeigt, daß dies für "achsenferne" Strahlen nicht gilt. Diese schneiden sich in F_2.

Die optische Astronomie verwendet Spiegelteleskope (**Abb. 3**), die Radioastronomie benutzt riesige Radioantennen (**Abb. 4**). In der Astronomie ist man gerade bei der Untersuchung weit entfernter Galaxien oder Quasare darauf angewiesen, möglichst *viel Licht* zu sammeln, was durch *sehr große Spiegel* (also solche mit möglichst großem Durchmesser) geschehen muß. Andererseits sollen die Spiegel möglichst genau sein und alle Lichtstrahen des beobachteten Objekts *in einem Brennpunkt* sammeln. Nur dann werden die untersuchten Objekte scharf abgebildet.

Abb. 2 zeigt, daß dies sphärisch gekrümmte Spiegel nicht vermögen, die Spiegel müssen anders gekrümmt sein. Hierzu die folgende Überlegung: In **Abb. 2** liegt der Schnittpunkt F_2 der achsenfernen Strahlen unterhalb des Brennpunktes F_1 (Schnittpunkt der achsennahen Strahlen). Für diese Strahlen müßte also ein zweiter Spiegel mit größerem Radius verwendet werden, sodaß der gleiche Brennpunkt entsteht. Dies erläutert **Abb. 5**: Der ursprüngliche Spiegel Sp_1 hat den Krümmungsmittelpunkt M_a und damit für achsennahe Strahlen 1 und 1' den Brennpunkt F_1, für achsenferne Strahlen 2 und 2' den "Brennpunkt" F_2. Zeichnet man einen zweiten Spiegel Sp_2 hinzu, der einen größeren Krümmungsradius (mit Mittelpunkt M_b) hat, so hätten im linken Teilbild die achsenfernen Strahlen 2 und 2' den selben Brennpunkt. (Im rechten Teilbild ist die Krümmung wiederum zu schwach.) Für achsennahe Strahlen brauchte man also Spiegel 1, für achsenferne gleichzeitig Spiegel 2. Der Spiegel müßte also entsprechend aufgebogen werden, insbesondere zum Rand hin, bis sich alle Strahlen nach der Reflexion in demselben Brennpunkt F treffen. Dazu folgender Gedankengang: Wir betrachten noch einmal die beiden Spiegel des linken Teilbildes von **Abb. 5** (siehe **Abb. 6**, in der sie getrennt aufgeführt sind). Zeichnen wir parallel zur Grundlinie g eine Gerade l, die von g die Entfernung $|FS|$ hat, so stellen wir fest, daß für die achsennahen Strahlen 1 und 1' mit "exaktem" F die Strecke $\overline{FA}$ etwa genau so lang ist wie die Strecke $\overline{AD}$. (A ist jeweils der Auftreffpunkt der Strahlen auf die Spiegelfläche.) Je weiter sich die Strahlen von der optischen Achse entfernen, desto schlechter ist die Bedingung $|FA| = |AD|$ erfüllt. Um also einen idealen Spiegel zu erhalten, müßte er derart gekrümmt sein, daß die Strecke $\overline{FA}$ genau so lang ist wie die Strecke $\overline{AD}$. (Ist der Spiegel zu stark aufgebogen, wie im rechten Teilbild von **Abb. 5**, so ist diese Bedingung auch nicht mehr erfüllt.)

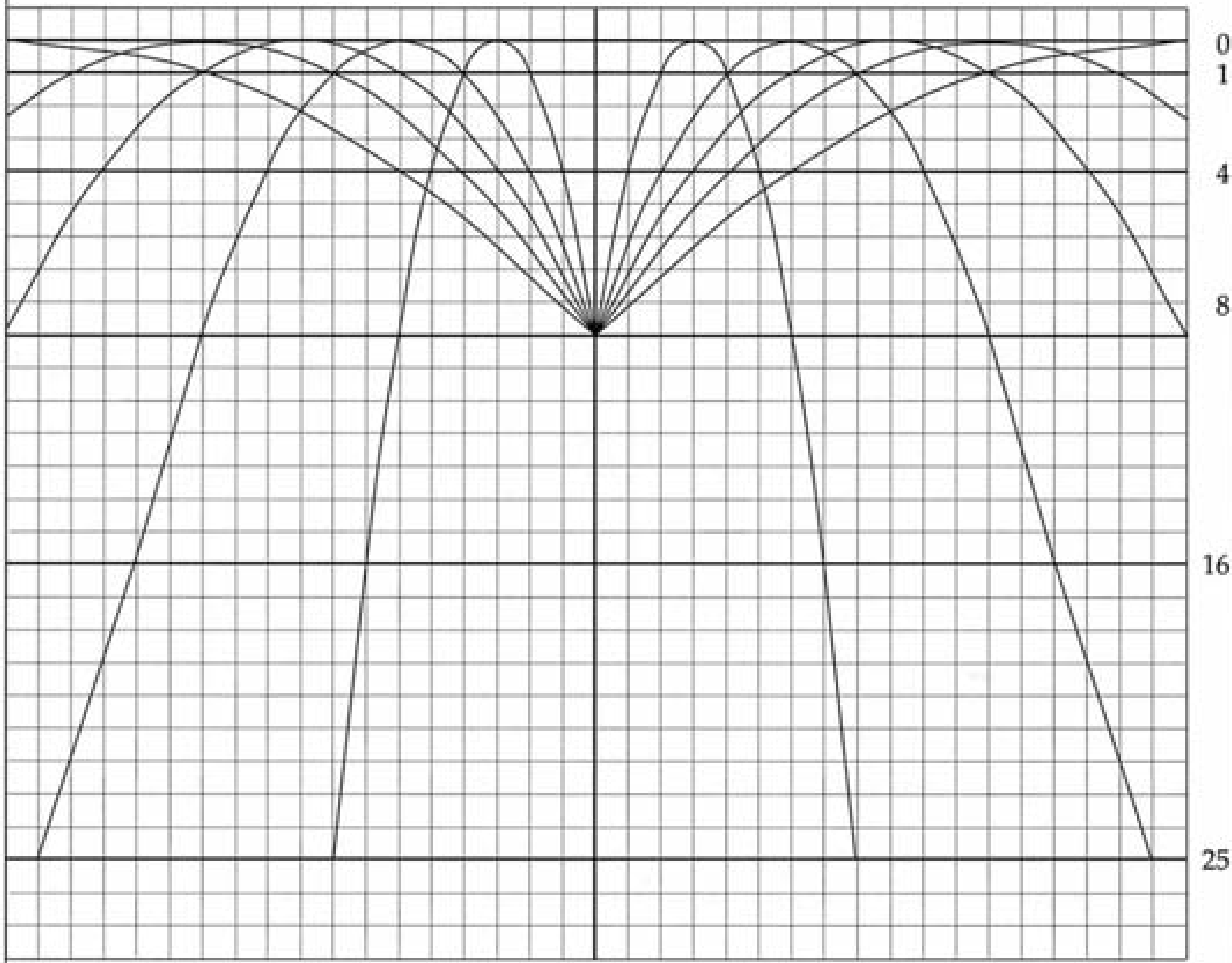
Zur Konstruktion eines solchen Spiegels betrachten wir die **Abb. 7**. Gesucht ist der geometrische Ort aller

Bild 1: Himmelsbeobachter bilden 8 Parabol-Antennen eines Teils des "Vera Large Array", einer Radioteleskop-Anlage in der Wüste von New Mexico nahe Socorro. Die Gesamtanlage hat die Form eines Y, sie umfaßt 27 Antennen, die alle die Parabol-Form haben.

Quelle: Time-Life Buch "Galaxien" aus der Serie "Reise durch das Universum"; Time-Life, Amsterdam 1989, Buchseite 88.

Bitte lesen Sie weiter auf S. 31

Arbeitsblatt



Die Parabeln stellen die Bewegungslinien der Wassertropfen eines Springbrunnens dar; eine Gesetzmäßigkeit, die schon Galileo Galilei (1564 – 1642) erkannt hat.

Zur Konstruktion: Verstärkt gezeichnet sind die oberste und dann darunter die 1., 4., 9., 16., 25. Gerade also jene der Quadratzahlen. Vom Schnittpunkt einer beliebigen verstärkten horizontalen und einer beliebig gewählten vertikalen Geraden rückt man schrittweise zur nächsten verstärkten horizontalen Geraden vor und rückt dabei um einen festen Betrag nach rechts bzw. links, bis die oberste Gerade erreicht ist; danach geht es wieder schrittweise abwärts. Die Punkte liegen auf Parabeln.

Aufgaben:

1) Zeichne diejenige Parabel ein, die entsteht, wenn du jeweils um 0,75 Einheiten nach rechts bzw. links rückst.

2) Bestimme die Gleichungen aller eingezeichneten Parabeln, und zwar in Scheitelpunktsform $y = (x - x_0)^2 + y_0$ wie auch in Normalform $y = ax^2 + bx + c$. Die oberste Gerade soll die x-Achse sein und die verstärkt gezeichnete vertikale die y-Achse.

3) Bestimme die Gleichung aller Parabeln, die der obigen Konstruktionsvorschrift genügen, wenn der Koordinatenursprung der gemeinsame Schnittpunkt aller Parabeln ist (Scheitelpunktsform und Normalform).

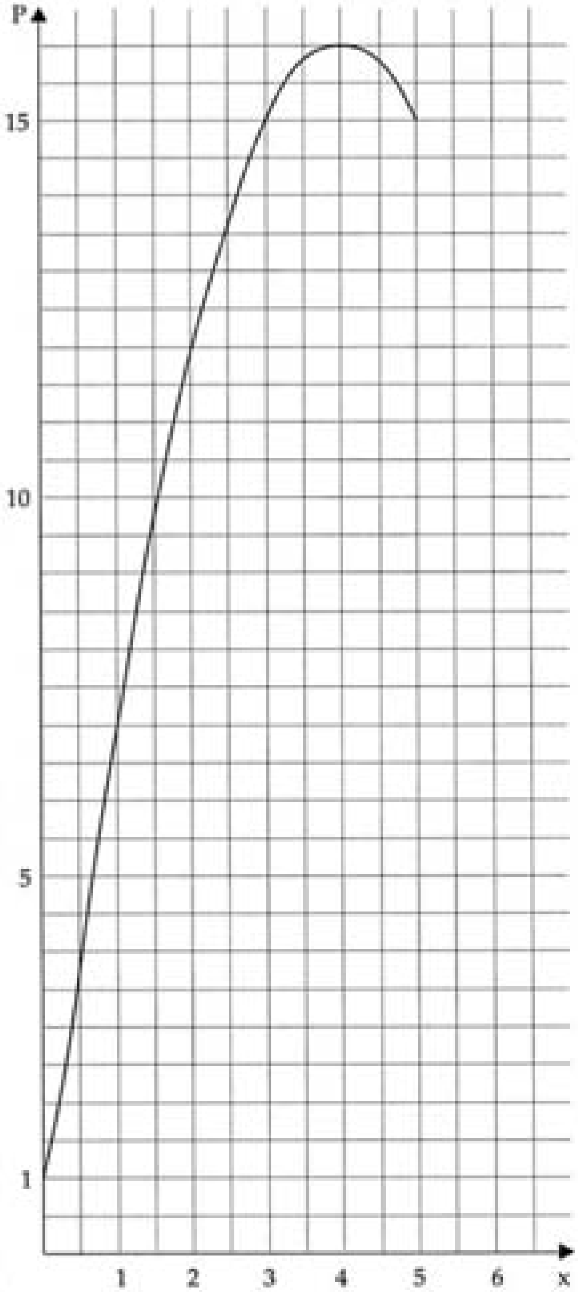
Kopiervorlage

Arbeitsblatt

Die folgenden **Extremwertaufgaben** führen alle auf Funktionen, deren Graphen Parabeln sind. Da die Funktionswerte in diesen Fällen jeweils im Scheitelpunkt ihren großen Wert (ihr Maximum) annehmen, wenn sie nach unten geöffnet sind, und ihren kleinsten Wert (ihr Minimum), wenn sie nach oben geöffnet sind, geht es also immer darum, die Stelle zu finden, für die die zur Funktion gehörige Parabel ihren Scheitelpunkt hat.

Beispiel
Die Zahl 8 soll so in die Summe zweier Zahlen x und y zerlegt werden, daß das Produkt $x \cdot y$ dieser Zahlen (verglichen mit allen anderen Möglichkeiten) am *größten* wird.

Zum Beispiel ist	und das zugehörige Produkt
$8 = 1 + 7$	$1 \cdot 7 = 7$
$8 = 1{,}5 + 6{,}5$	$1{,}5 \cdot 6{,}5 = 9{,}75$
$8 = 3 + 5$	$3 \cdot 5 = 15$
$8 = 2{,}43 + 5{,}57$	$2{,}43 \cdot 5{,}57 = 13{,}5351$
$8 = 4 + 4$	$4 \cdot 4 = 16$
$8 = 0{,}1 + 7{,}9$	$0{,}1 \cdot 7{,}9 = 0{,}79$



Bilde weitere Zerlegungen:

x	5, 5	3, 5	4, 2	2, 1
y				
Produkt				

Die Werte der Produkte liegen offenbar auf einer Parabel, die ihren Scheitelpunkt an der Stelle $x = 4$ hat.

Die Lösung der Aufgabe gewinnen wir korrekter so:
Für die beiden Summanden x und y gelten zwei Gleichungen: (1) $x + y = 8$ und (2) $x \cdot y = p$.
Aus Gleichung (1) folgt $y = 8 - x$. Eingesetzt in die Gleichung (2) ergibt das $x\,(8 - x) = p$ oder $p = -x^2 + 8x$.
Der Graph zu dieser Funktionsgleichung ist also eine verschobene, nach unten geöffnete Normalparabel. In ihrem Scheitelpunkt nimmt der Produktwert p das *Maximum* an.
Wir bestimmen die zugehörige Scheitelpunktsform der Gleichung:

$$p = -x^2 + 8x$$
$$p = -(x^2 - 8x + 4^2) + 16$$
$$p = -(x - 4)^2 + 16$$

Der Scheitelpunkt hat also die Koordinaten (4/16).
Damit ist lückenlos nachgewiesen, daß die Zerlegung in die Summanden 4 und 4 diejenige ist, für die das Produkt maximal ist.

Aufgabe: Die Zahl 8 soll so in die Summe zweier Zahlen x und y zerlegt werden, daß die Summe ihrer Quadrate am *kleinsten* wird (minimal wird).

Aufgabe: Eine Strecke a = 18cm ist so in zwei Teile zu teilen, da die Summe aus dem Quadrat der ersten Zahl und dem doppelten Quadrat der zweiten Teilstrecke am *kleinsten* wird.

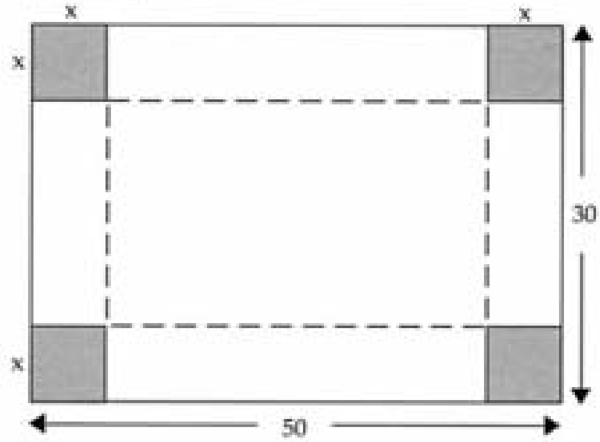
Kopiervorlage

Arbeitsblatt

Aufgabe 1
Um einen Kasten zu basteln, sollen aus einem rechteckigen Karton der Größe 30 cm x 50 cm an den Ecken gleichgroße Quadrate herausgeschnitten werden.

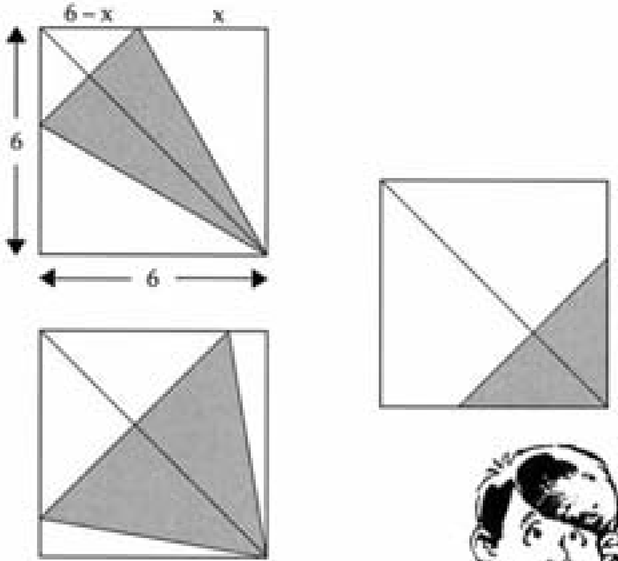
Wie lang sind die Quadratseiten, wenn die Summe der Seitenflächen möglichst groß sein soll?

Wie groß ist x, wenn die Grundfläche dazukommt?



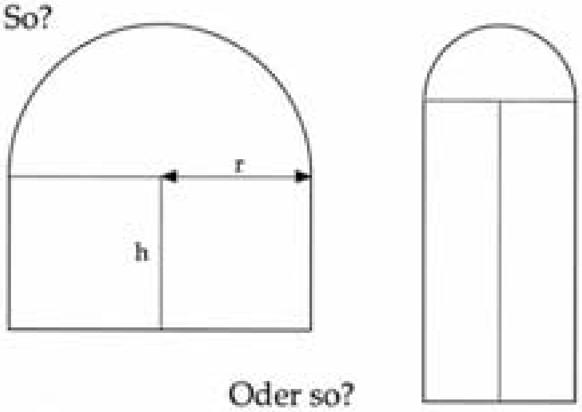
Bezeichnungen:
s sei die Summe der Flächeninhalte, x die unbekannte Länge der Quadratseite.

Aufgabe 2
Einem Quadrat mit der Seite a = 6cm soll ein gleichschenkliges Dreieck so einbeschrieben werden, daß seine Spitze in einer Ecke des Quadrates liegt. Wie lang sind seine Seiten zu wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird?



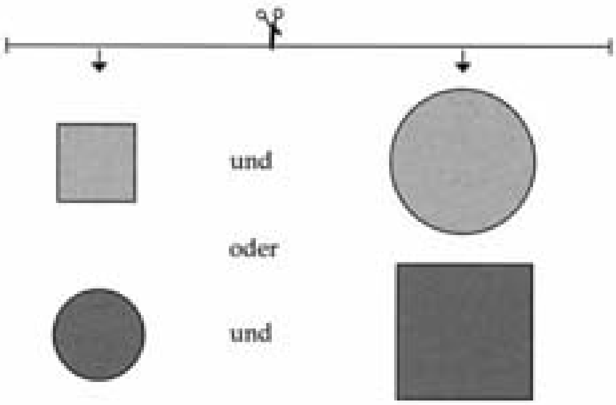
Aufgabe 3
Ein Fenster soll die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Rundbogen haben. Die Umrahmung soll insgesamt 6 m betragen. Bestimme die Maße für das Fenster, wenn die Fensterfläche möglichst groß ist. Wie groß ist in diesem Fall die Fläche?

So?



Oder so?

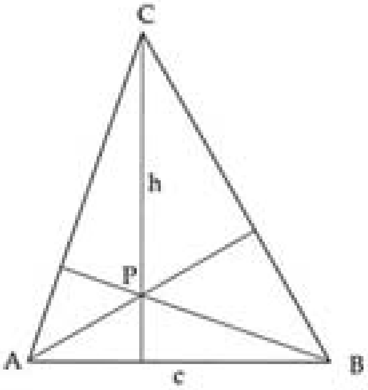
Aufgabe 4
Ein 1 m langer Draht soll zerschnitten werden, um aus einem Stück ein Quadrat und aus dem anderen Stück einen Kreis zu biegen. Wie lang müssen die Teilstücke sein, damit die Summe der Flächeninhalte möglichst groß wird?

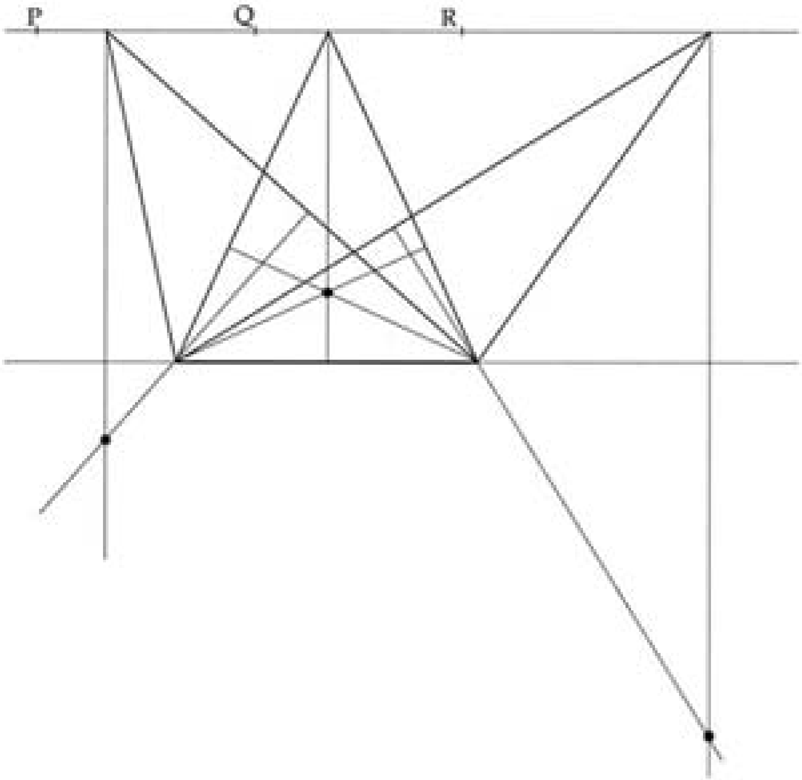


Kopiervorlage

Arbeitsblatt

Satz: Die Menge aller Höhenschnittpunkte P aller Dreiecke mit der Grundseite $\overline{AB} = c$ und der Höhe h liegen auf einer Parabel.





(1) *Zeichne* drei solcher Parabelpunkte in obige Figur ein (ABP, ABQ, ABB).
(2) *Begründe:*
   a) Die Parabel geht durch die Endpunkte der Grundseite c.
   b) Ihr Scheitelpunkt ist der Mittelpunkt des zugehörigen gleichschenkligen Dreieckes.
(3) Bestimme die Gleichung der Parabel, wenn AB die x-Achse ist und die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ die y-Achse.

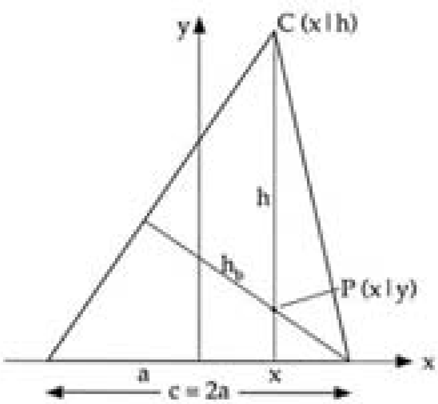
Für den Beweis des Satzes benötigen wir die Kenntnis darüber, wie die Steigungen zweier Geraden, die aufeinander senkrecht stehen, miteinander in Beziehung stehen: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.
AB sei die x-Achse, die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ die y-Achse.

Beweis: Die Steigung der Geraden AC ist $\frac{h}{x+a}$,
die Steigung von h_b demnach $-\frac{x+a}{h}$.

Für h_b ergibt sich also die Gleichung

$$y = -\frac{x+a}{h}(x-a) = \frac{a^2-x^2}{h}.$$

Also ist $x^2 = -hy + a^2$ oder $y = -\frac{1}{h}x^2 + \frac{a^2}{h}$.



Kopiervorlage

Kasten 1

Gesetzmäßikeiten am Hohlspiegel

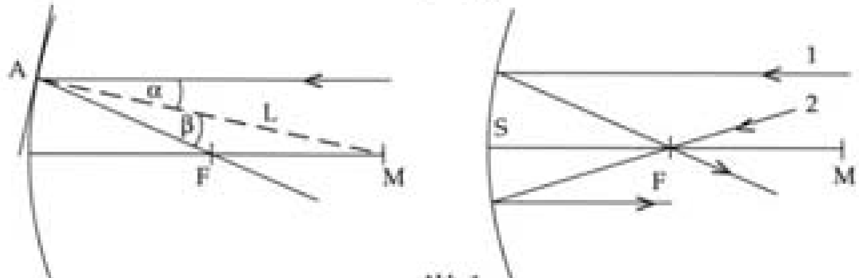


Abb. 1

Linkes Teilbild: Man konstruiert den reflektierten Strahl, indem vom Auftreffpunkt A das Lot L durch den Krümmungsmittelpunkt M gezeichnet wird. Einfallswinkel α muß dann gleich dem Reflexionswinkel β sein.
Rechtes Teilbild: Zur optischen Achse parallele Strahlen (1) werden durch den Brennpunkt F reflektiert. F halbiert die Strecke $\overline{SF}$. Strahlen durch den Brennpunkt (2) werden parallel zur optischen Achse reflektiert.

Kasten 2

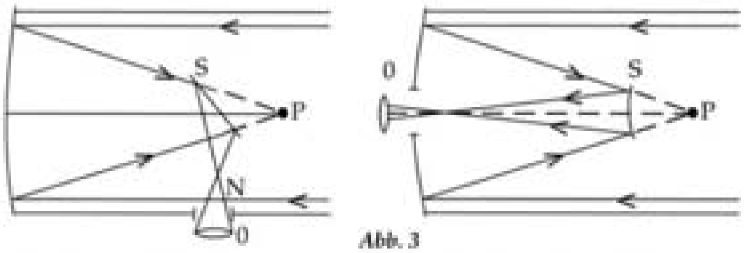


Abb. 3

Spiegelteleskop nach Newton
Das Sternenlicht wird von einem Spiegel am Boden des Fernrohres zu einem Brennpunkt P in der oberen Hälfte des Rohres geworfen, wo ein ebener Spiegel S es durch die Öffnung zum Newtonschen Brennpunkt N lenkt. Das Okular O dient zur Beobachtung.

Spiegelteleskop nach Cassegrain
Das Sternenlicht wird vom Spiegel am unteren Ende des Fernrohres gegen den kleinen gekrümmten Spiegel S reflektiert. Dieser wirft es durch eine Öffnung im Spiegel zurück zum Beobachtungsokular O.

Kasten 3

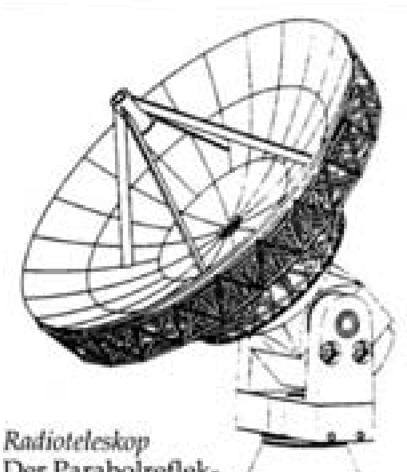


Abb. 4

Radioteleskop
Der Parabolreflektor eines Radioteleskops sammelt die Radiowellen und reflektiert sie in den Brennpunkt im Zentrum des Vierbeins. Von dort werden die Wellen zur weiteren Analyse durch die Öffnung im Scheitel des Parabolreflektors zu weiteren Untersuchungsgeräten reflektiert. Das Prinzip des optischen Cassegrain-Teleskops ist ganz ähnlich.

Quelle zu Abb. 4: Spektrum der Wissenschaft, April 1999, S. 16

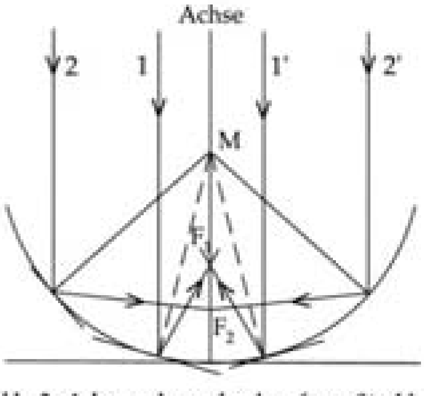


Abb. 2: Achsennahe und achsenferne Strahlen am Hohlspiegel

Punkte A, die von einem gegebenen Punkt F und einer "Leitlinie" l dieselbe Entfernung r besitzen. Der Abstand zwischen F und l sei p (zwischen der x-Achse und l ist die Entfernung p/2). A besitze die Koordinaten x und y. Dann gilt:

(1) $r = y + \frac{p}{2}$ (Voraussetzung),

(2) $r^2 = x^2 + (\frac{p}{2} - y)^2$

(nach dem Satz des Pythagoras).

Einsetzen von (1) in (2) ergibt

(3) $x^2 + (\frac{p}{2} - y)^2 = (y + \frac{p}{2})^2$

$\Leftrightarrow x^2 + (\frac{p}{2})^2 - py + y = (\frac{p}{2})^2 + py + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot p \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2p} \cdot x^2.$

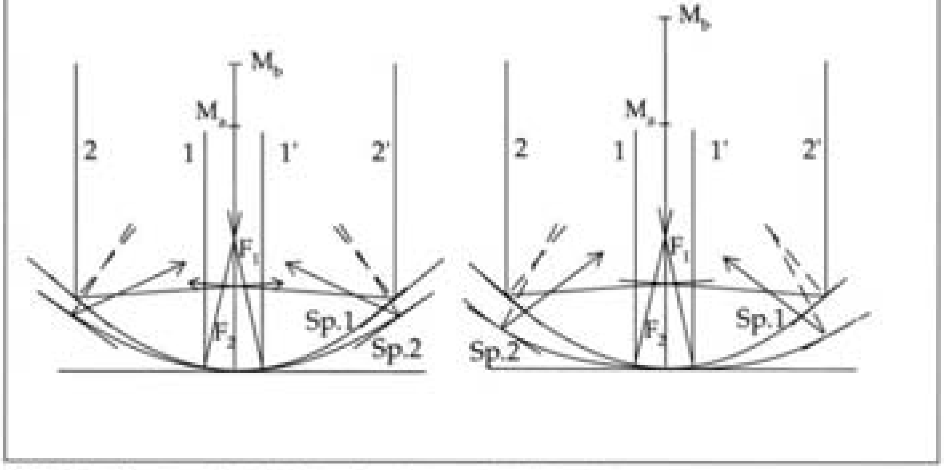


Abb. 5: Strahlengänge bei Hohlspiegeln mit unterschiedlicher Krümmung

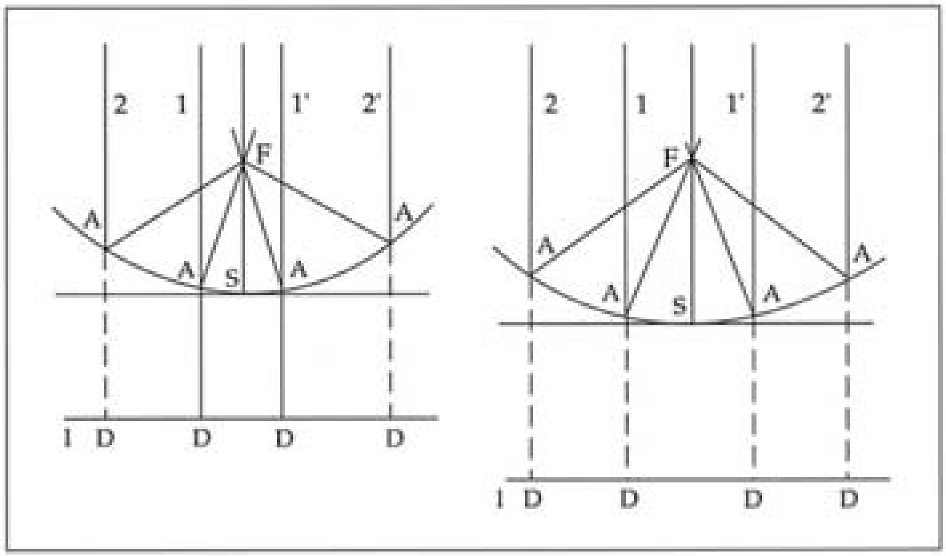


Abb. 6: Strahlengang bei zwei verschiedenen Hohlspiegeln (unterschiedliche Krümmung und Brennweite)

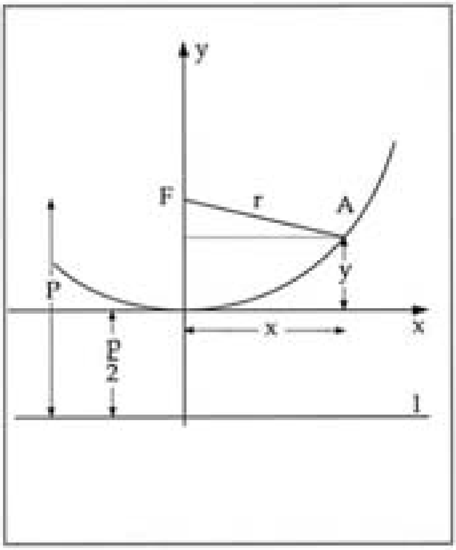


Abb. 7: Zur Herleitung der Parabelgleichung

Und dieses ist genau die Gleichung einer Parabel in Scheitellage mit dem Streckfaktor 1/2p, also der Gestalt

$y = k \cdot x^2$.

Ideale Spiegel für optische und Radioteleskope sind also parabolisch gekrümmt.

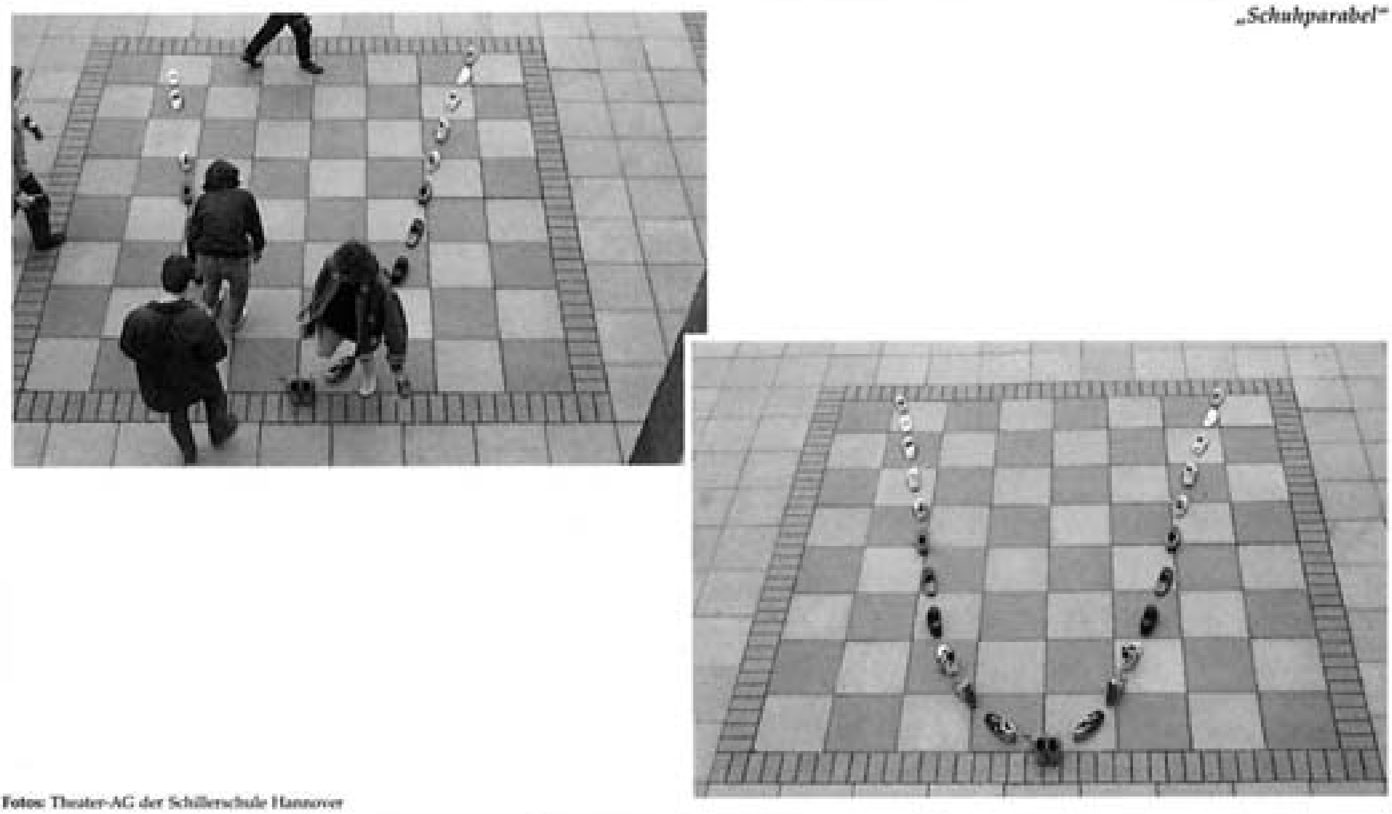
Aufgaben zum Parabolspiel

1) Zeichne wie in den Abbildungen 5 und 6 sphärische Spiegel mit den Krümmungsradien 5 cm und 7 cm, und verdeutliche die Strahlengänge für achsennahe und achsenferne Strahlen.

2) Welche Gleichung besitzt ein Parabolspiegel, dessen Brennweite jeweils den halben Krümmungsradien der Aufgabe 1 entspricht? Zeichne jeweils die Parabel!
Lösung: Die Parabelgleichungen sind $y = 0{,}2 \cdot x^2$ bzw. $y = (1/7) \cdot x^2$, denn die Brennweiten p sind 2,5 cm bzw. 3,5 cm.

3) Das Fernrohr auf dem Mount Palomar hat einen Parabolspiegel mit dem Durchmesser 5 m bei einer Brennweite von 12 m. Stelle die Gleichung der Parabel auf und zeichne diese in angemessenem Maßstab.
Lösung: Die Gleichung ist $y = (1/24) \cdot x^2$ bei einer Einheit 1 cm $\hat{=}$ 1 m in Wirklichkeit.

„Schuhparabel"



Fotos: Theater-AG der Schillerschule Hannover