MatheWelt „Grenzwerte“ – weitere Lösungen

Aufgabe 18/19

Berechnung von x_6 bis x_{11}, die korrekten Dezimalen sind jeweils **fett** wiedergegeben:

$x_5 = 17/12 = 1\mathbf{{,}41}6666666$ (**2** korrekte Dezimalstellen)

$x_6 = 24/17 = 1{,}\mathbf{41}1764705\ldots$ (**2** korrekte Dezimalstellen)

$x_7 = 577/480 = 1{,}\mathbf{41421}5686\ldots$ (**5** korrekte Dezimalstellen)

$x_8 = 816/577 = 1{,}\mathbf{41421}1438\ldots$ (**5** korrekte Dezimalstellen)

$x_9 = 665857/470832 = 1{,}\mathbf{41421356237}468\ldots$ (**11** korrekte Dezimalstellen)

$x_{10} = 941664/665857 = 1{,}\mathbf{41421356237}150\ldots$ (**11** korrekte Dezimalstellen)

$x_{11} = 886731088897/627013566048 = 1{,}\mathbf{41421356237309504880168}9$

(**23** korrekte Dezimalstellen)

Betrachtet man nur die Folgenglieder mit den geraden Indizes, dann kann man vermuten, dass sich schrittweise die Anzahl der korrekten Dezimalstellen k mehr als verdoppelt, nämlich von k auf 2k+1. Danach müsste x_{13} bereits auf 47 Dezimalstellen genau sein und x_{15} auf 95 Dezimalstellen. Es gilt

$$x_{13} = 1572584048032918633353217/1111984844349868137938112$$
$$= 1.\mathbf{41421356237309504880168872420969807856967187537}72\ldots,$$

also ist x_{13} tatsächlich auf 47 Dezimale genau und damit x_{15} mit Sicherheit auf (mehr als) 50 Dezimale genau.

Aufgabe 20

Die Folge $\langle a_n \rangle$ der ungeraden Folgenglieder der Folge $\langle x_n \rangle$ ist definiert durch

$a_1=1$ und $a_{n+1}= \frac{1}{2}(a_n + 2/a_n)$.

Wegen der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, die man leicht durch Quadrieren überprüft, gilt für positive Zahlen a und b:

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{(a \cdot b)}, \text{ also } a_{n+1} \geq \sqrt{(a_n \cdot 2/a_n)} = \sqrt{2}.$$

Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist also (ab dem zweiten Glied) durch $\sqrt{2}$ nach unten beschränkt.

Weiter ist die Folge $\langle a_n \rangle$ monoton fallend, denn es gilt:

$$a_{n+1} \le a_n \leftrightarrow \tfrac{1}{2}(a_n + 2/a_n) \le a_n \leftrightarrow 1/a_n \le a_n/2 \leftrightarrow 2 \le a_n^2 \leftrightarrow \sqrt{2} \le a_n.$$

Da die Folge $\langle a_n \rangle$ monoton fällt und nach unten beschränkt ist, ist sie auch konvergent. Ihren Grenzwert kann man berechnen, indem man in der Gleichung $a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 2/a_n)$ auf beiden Seiten den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführt. Man erhält dann für den Grenzwert der Folge $\langle an \rangle$ die Gleichung:

$$g = \tfrac{1}{2}(g + 2/g),$$

deren einzige positive Lösung $\sqrt{2}$ ist. Es also $g = \sqrt{2}$.

Für die Folge $\langle b_n \rangle$ der ungeraden Folgenglieder von $\langle x_n \rangle$ gilt: $b_n = 2/a_n$. Die Folge $\langle b_n \rangle$ ist also durch $\sqrt{2}$ nach oben beschränkt, monoton wachsend und hat ebenfalls den Grenzwert $\sqrt{2}$.

Aufgabe 21

Die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge soll offenbar beschreiben, wie schnell sich eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit jedem Folgengleid ihrem Grenzwert g nähert. Man kann dazu die die Abstände von a_n und a_{n+1} vom Grenzwert miteinander vergleichen. Im Fall

$$|a_{n+1} - g| \le \tfrac{1}{2}\, |a_n - g|$$

werden diese Abstände schrittweise halbiert. Man spricht allgemein von einer linearen Konvergenzgeschwindigkeit, wenn

$$|a_{n+1} - g| \le c\, |a_n - g|$$

für eine feste Zahl c mit $0<c<1$ gilt.

Von einer Konvergenzgeschwindigkeit der Ordnung p spricht man, wenn für ein Zahl c mit $0<c<1$ gilt:

$$|a_{n+1} - g| \le c\, |a_n - g|^p$$

Für p=1 liegt eine lineare Konvergenzgeschwindigkeit vor, für p=2 eine quadratische, etc. Konvergenz der Ordnung p bedeutet i.w. dann, dass in jedem Iterationsschritt die Anzahl der korrekten Dezimalstellen ver-p-facht werden, also beispielsweise bei quadratischer Konvergenz verdoppelt.

Aufgabe 22

Die Überlegungen (zur Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit) sind nicht vom Startwert abhängig.

Aufgabe 24

Zur Berechnung von √a geht man ebenso vor – wie bei der Berechnung von √2:
Man rät – ob gut oder schlecht spielt wegen der hohen Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens keine große Rolle – einen Startwert a_1 und berechnet dann $a_{n+1} = ½(a_n + a/a_n)$.

Aufgabe 25

Um das Verfahren auf das Ziehen von dritten Wurzeln zu verallgemeinern, versuchen wir es zunächst, in seinem Vorgehen zu verstehen. Wir wollen näherungsweise die Gleichung $x^2=2$ lösen und starten mit einem geratenen Wert x_1, für den natürlich $x_1^2 \neq 2$ gilt. Es gilt aber stets für $x_1 \cdot 2/x_1 = 2$. Ist x_1 zu klein, dann ist $2/x_1$ zu groß und umgekehrt. Das arithmetische Mittel von x_1 und $2/x_1$ ein besserer Näherungswert für die zu lösende Gleichung, weil es zwischen x_1 und $2/x_1$ liegt. Deshalb setzen wir $x_2 = ½(x_1 + 2/x_1)$. Auf x_2 wenden wir nun dieselbe Überlegung an, die uns auf $x_3 = ½\ (x_2 + 2/x_2)$ führt und so fort.
Wenn wir nun die Gleichung $x^3=2$ lösen wollen, dann können wir ebenso vorgehen: Wir raten einen Startwert x_1, für den natürlich $x_1^3 \neq 2$ gilt. Ist x_1 zu groß, dann gilt $x_1^3 > 2$, also $x_1 > 2/x_1^2$. Der Wert $2/x_1^2$ ist nun aber – wie man sich leicht überlegt – zu klein. (Oder umgekehrt.) Also wird man als besseren Nährungswert x_2 einen Wert zwischen x_1 und $2/x_1^2$ wählen.
Man kann – wie oben – wieder das arithmetische Mittel von x_1 und $2/x_1^2$ wählen $x_2 = ½(x_1 + 2/x_1^2)$ und dann entsprechend fortfahren: $x_3 = ½(x_2 + 2/x_2^2)$ und so fort.
Nun kann man das Verfahren ausprobieren. Es funktioniert und konvergiert gegen die dritte Wurzel aus 2 - nur nicht mehr so schnell wie bei der Bestimmung der Quadratwurzeln.
Nach unseren Überlegungen kann man aber statt des arithmetischen Mittels von x_1 und $2/x_1^2$ für x_2 auch jede andere Zahl zwischen x_1 und $2/x_1^2$ wählen zum Beispiel
$x_2 = 2/3 \cdot x_1 + 1/3 \cdot 2/x_1^2$ und dann entsprechend $x_3 = 2/3 \cdot x_2 + 1/3 \cdot 2/x_2^2$ und auf diese Weise fortfahren. Überzeugen Sie sich, dass das so gewählte x_2 tatsächlich zwischen x_1 und $2/x_1^2$ liegt. (Wir haben bei der Berechnung von x_2 die Werte x_1 und $2/x_1^2$ unterschiedlich gewichtet. Warum?) Probieren Sie nun das so modifizierte Verfahren aus und betrachten sie seine Konvergenzgeschwindigkeit im Vergleich zu dem zuerst beschriebenen, bei dem wir als x^2 das arithmetische Mittel gewählt haben.
Überlegen Sie abschließend, wie man mit hoher Konvergenzgeschwindigkeit vierte und fünfte Wurzeln ziehen kann, und testen Sie Ihre Verfahren.