Bestell-Nr. 58242

# mathematik lehren

Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien

242
Februar 2024

\+ MatheWelt
Das Arbeitsheft
*Alles Anteile oder was?*




FRIEDRICH

# Qualitätsvoll Mathematik unterrichten

**WIRKSAM UNTERRICHTEN**
Fünf Prinzipien der Unterrichtsgestaltung

**KONKRETE PLANUNG**
Von der Lernzielsetzung bis zur Gesprächsführung

**DIGITALE MEDIEN**
Sinus hören und Parameter erkunden

Fotos: © DZLM

## Liebe Leser:innen,

viele Mathematik-Lehrkräfte investieren viel Energie in die Weiterentwicklung ihres Unterrichts. Doch wohin soll sich Unterricht eigentlich entwickeln? Haben alle im Kollegium das gleiche Ziel, was qualitätsvollen Unterricht ausmacht? Oder ändern sich die Qualitätsmerkmale guten Unterrichts ständig, vorgestern Sprachbildung, gestern Inklusion und morgen Digitalisierung?
In dieser Ausgabe stellen wir aus dem großen Pool möglicher didaktischer Prinzipien die fünf wichtigsten vor, die für einen fachdidaktischen Kernbestand von Qualitätsmerkmalen ausreichen. Wir wollen zeigen, wie diese fünf Prinzipien und ihre Verknüpfung dabei helfen, wichtigen didaktische Entscheidungen zu treffen, in ganz unterschiedlichen Inhaltsbereichen, Schuljahren und Leistungsniveaus (verschiedener Schularten).
Diese fünf Prinzipien bilden unsere gemeinsame und kohärente Grundlage für das große Zehnjahresprojekt QuaMath („Unterrichts- und Fortbildungsqualität in Mathematik entwickeln"), das in 2023 in fast ganz Deutschland gestartet ist und bis 2033 bis zu 10 000 Schulen einbeziehen wird. Auch unsere fünf Prinzipien bieten kein Patentrezept, mit dem sich guter Unterricht automatisch herstellt, doch gemeinsam kann es gelingen, die fünf Qualitäten täglich etwas mehr umzusetzen.

*Lars Holzäpfel, Bettina Rösken-Winter, Susanne Prediger*



## Qualitätsvoll Mathematik unterrichten

Bild: Leonardo.AI

16

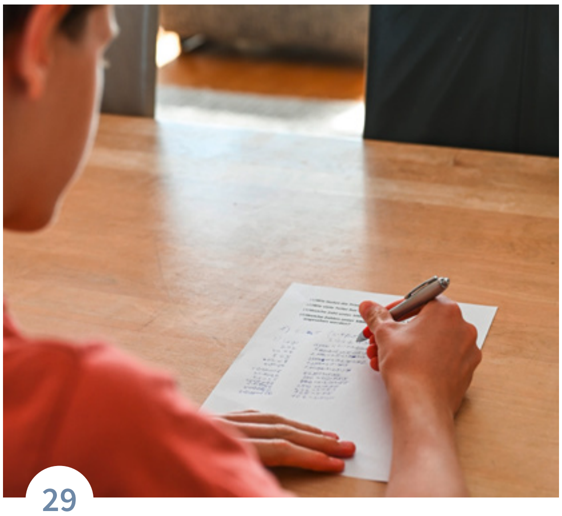
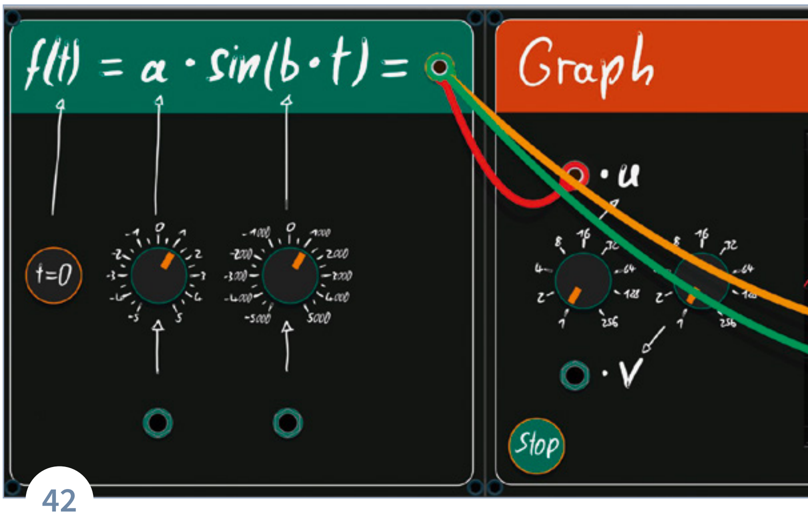


Foto: L. Holzäpfel

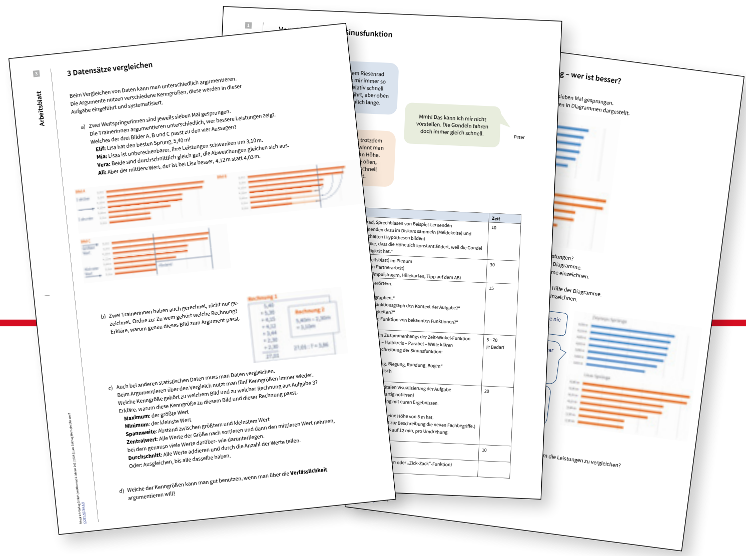


Grafik: screenshot erstellt mit Mathe-Synthesizer



## Magazin





**Alle Downloads zu dieser Ausgabe**
Bitte geben Sie den Code **d58242ek** in das Suchfenster auf **www.friedrich-verlag.de** ein, um alle Downloads dieser Ausgabe herunterzuladen.

LARS HOLZÄPFEL, SUSANNE PREDIGER, DANIELA GÖTZE, BETTINA RÖSKEN-WINTER, CHRISTOPH SELTER

# Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien

**Qualität im Mathematikunterricht wollen viele weiterentwickeln – aber gibt es überhaupt eine gemeinsame Idee, was Qualität ausmacht? Wir setzen auf fünf Prinzipien als gemeinsamen Rahmen, um kohärent zu arbeiten.**

Immer wieder gibt es neue Ideen für den Mathematikunterricht, die an Lehrkräfte herangetragen werden: Das überarbeitete Schulbuch wirbt mit innovativen Zugängen, ein neues Arbeitsblatt wird über Instagram angepriesen, eine Kollegin schwärmt von einem gelungenen Unterrichtseinstieg oder das Ministerium führt ein neues digitales Tool ein … Die tägliche Herausforderung für jede Lehrkraft besteht darin, (mehr oder weniger explizite) Entscheidungen zu treffen, ob und wie solche Ideen aufgegriffen und adaptiert werden können, um die Qualität des eigenen Mathematikunterrichts zu steigern.

Aber was genau macht die Qualität von Unterricht denn in den Tiefenstrukturen aus? Helfen die neuen Ideen wirklich, Lernende auch zum tiefen Denken anzuregen, oder geht es nur um das Trainieren von Fertigkeiten? Lassen sie die Lernenden isoliert auf ihrem Niveau arbeiten oder regen sie auch die Kommunikation an?

## Fünf Prinzipien geben Orientierung

Die didaktische Herausforderung, Unterrichtsqualität für den Mathematikunterricht fachdidaktisch zu bestimmen, muss berücksichtigen, dass es viele Listen von Qualitätsmerkmalen und didaktischen Prinzipien gibt (z. B. Kilpatrick u. a. 2001, Scherer/Weigand 2017, Hiebert/Grouws 2007, Heitzer/Weigand 2020). Manche sind sehr umfassend, aber nicht fachspezifisch (z. B. Klieme u. a. 2009, Meyer 2004), andere zu abstrakt, um sie unmittelbar in der täglichen Unterrichtspraxis nutzen zu können.

Wir haben daher die mathematikdidaktische und bildungswissenschaftliche Forschungsliteratur ausführlich gesichtet, verschiedene Modelle übereinandergelegt und immer wieder mit erfahrenen Lehrkräften, Aus- und Fortbildenden diskutiert, welche Qualitätsmerkmale als die wichtigsten erachtet werden können. Ausgewählt haben wir fünf Prinzipien


**Abb. 1**: Fünf Prinzipien für qualitätsvollen Mathematikunterricht

Icons: © DZLM

## Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

Der Erwerb tragfähiger Konzepte sowie die sichere Beherrschung von Strategien und Verfahren (inkl. Algorithmen, Formeln, …) wird durch Verständnis fundiert. ***Verständnis*** für Konzepte, Strategien und Verfahren wird entwickelt, indem Lernende angeregt und unterstützt werden, …

- … sich mit sinnstiftenden (Kontext-)Situationen auseinanderzusetzen und ausgehend von intuitiven Deutungen und Vorgehensweisen Grundvorstellungen für Konzepte zu entwickeln und nachzuvollziehen (***Genetisches Prinzip***),
- … Lernpfade ausgehend von intuitiven Vorgehensweisen zu beschreiten, die sukzessive schematisiert werden hin zu Verfahren (***Fortschreitende Mathematisierung*** *bzw.* ***Schematisierung***),
- … enaktive, bildliche, verbale, tabellarische, graphische oder symbolische Darstellungen explizit zu vernetzen und diese Zusammenhänge zu verbalisieren, auch zur Begründung von Verfahren (***Darstellungsvernetzung***),
- … angeleitet zu reflektieren über Eigenschaften und Beziehungen mathematischer Objekte und Operationen bzgl. der Auswirkungen von Variationen auf die Eigenschaften und Beziehungen der mathematischen Objekte (***Operatives Prinzip***).

Der Erwerb von ***Fertigkeiten für Strategien und Verfahren*** erfolgt nach dem Verständnisaufbau und wird dann für den Aufbau weiteren Verständnisses benötigt. Auch Fertigkeiten müssen konsolidiert werden, um kognitiv zu entlasten, und flexibilisiert bleiben, um vielfältig anwendbar zu sein.

## Durchgängigkeit: Langfristiges Lernen ermöglichen

Da Lernen immer ein ***Weiterlernen*** ist, welches auf Gelerntem aufbaut und zu neuen Lernzielen hinführt, werden im Laufe der Schulzeit grundlegende Ideen, Inhalte, Aufgaben und Darstellungsmittel immer wieder auf verschiedenen Niveaus und unter Berücksichtigung unterschiedlicher Gesichtspunkte angesprochen, um deren Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung zu erzielen.

- Auf jeder Lernstufe werden diejenigen Aspekte des Lerngegenstands (z. B. Vorstellungen und Darstellungen) ausgewählt, die gut fortsetzbar und für den ***langfristigen Kompetenzaufbau*** entlang eines durchgängigen Lernpfads wichtig sind (***Prinzip der Fortsetzbarkeit***).
- Es werden Anknüpfungen zu vorausgehenden Lernstufen explizit hergestellt, indem die Bezüge für die Lernenden thematisiert werden. So erfolgt eine zunehmende Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung der mathematischen Kompetenzen (***Prinzip des Anknüpfens***).
- Lücken in den Verstehensgrundlagen müssen rechtzeitig aufgearbeitet werden, sodass die durchgängig nutzbaren Vorstellungen und Darstellungen, aber auch Fertigkeiten allen Lernenden zur Verfügung stehen (***Prinzip des Aufarbeitens***).

## Kognitive Aktivierung: Aktive Lernprozesse anregen

Um nachhaltige Lernprozesse anzuregen, werden nicht nur rein praktische Handlungen, sondern herausfordernde kognitive Aktivitäten angeregt, mit denen die angestrebten Lernziele fokussiert werden können. Lernende sollten nicht nur rezepthaft vorgehen, sondern auch begründen, vergleichen, Darstellungen zuordnen, Situationen mathematisieren, mit Mathematik argumentieren u. v. m. Dadurch werden inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen gefördert. Mit Aufgaben, Medien, Arbeitsmitteln und der Gesprächsführung wird das Lernen von Mathematik in allen Phasen angeregt und unterstützt, sodass Lernende …

- … in ***Erarbeitungsphasen*** Konzepte in reichhaltigen Situationen nacherfinden, Zusammenhänge eigenaktiv entdecken und intuitive Vorgehensweisen zu Verfahren schematisieren (***Entdeckendes Lernen***),
- … in ***Systematisierungsphasen*** ihre entwickelten Ideen, ersten Konzepte und Verfahren aktiv und im Austausch mit anderen systematisieren und sichern, dabei werden sie zielorientiert durch die Lehrkraft unterstützt (***Eigenaktives Ordnen***) und
- in ***Übungsphasen*** das Gelernte beziehungsreich üben, es flexibel anwenden und ihr Wissen vernetzen (***Produktives Üben***).

## Lernenden-Orientierung & Adaptivität: Lernstände aufgreifen

Unterricht wird zielorientiert geplant im Hinblick auf die Lernziele und berücksichtigt dazu ***lernendenorientiert*** typische Lernstände:

- Lernpfade werden ausgehend von typischen Lernständen der Lernenden so konzipiert, dass eigene Lernwege beschritten werden können.
- Typische Vorstellungen von Lernenden und Hürden werden berücksichtigt (***Lernen auf eigenen Wegen***).

***Adaptiver Unterricht*** berücksichtigt zusätzlich die heterogenen individuellen Lernstände:

- Individuelle Lernstände auf dem Lernpfad werden im Lehr-Lern-Prozess immer wieder stärkenorientiert wahrgenommen, tiefenscharf diagnostiziert und lernförderlich rückgemeldet (***Diagnosegeleitetheit***).
- Auf Basis der Diagnosen werden die jeweils nächsten Stufen im Lernpfad identifiziert und durch geeignete Aufgaben, Medien und Arbeitsmittel sowie angeleitete Diskussionen anvisiert (***Differenzierung nach Lernständen***).
- Der Unterricht wird unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Lernmöglichkeiten der Lernenden durch reichhaltige Lernumgebungen gerecht, die verschiedene Wege und Anforderungsstufen ermöglichen. Sie sind offen für differenzierte Komplexitätsgrade und differenzierende Unterstützung, wie z. B. Formulierungs- oder Visualisierungshilfen (***Natürliche Differenzierung***).

## Kommunikationsförderung: Über Mathematik sprechen

Kommunikation untereinander und mit der Lehrkraft ist essenziell zum Mathematiklernen.

- Das ***Gespräch über Mathematik*** regt dazu an, Gedanken zu vertiefen und verständlich auszudrücken, zu argumentieren, andere Perspektiven nachzuvollziehen und mit unterschiedlichen Ansichten umzugehen. Dadurch können die Lernenden ihre mathematischen Kompetenzen weiterentwickeln (***Lernen von- und miteinander***).
- Kommunizieren über Mathematik muss erst gelernt werden, die ***mathematikbezogenen Sprachhandlungen*** und dafür notwendigen Sprachmittel sind also auch Lerngegenstand. Dazu wird Sprache im Unterricht eingefordert, unterstützt und sukzessive aufgebaut für die Bewältigung der jeweils fachlich relevanten sprachlichen Anforderungen (***Fachbezogene Sprachbildung***).

**Tab. 1**: Fünf Prinzipien für qualitätsvollen Unterricht

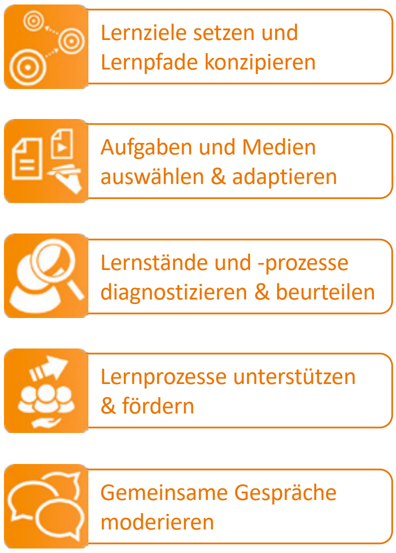



**Abb. 2**: Fünf Jobs (= didaktische Anforderungssituationen) der qualitätsvollen Unterrichtsplanung

(s. **Abb. 1**), die zahlreiche wichtige Qualitätsmerkmale enthalten und mit denen man in vielen unterrichtlichen Anforderungssituationen gute didaktische Entscheidungen treffen kann (Prediger u. a. 2022). Diese werden wir nachfolgend kurz skizzieren (Überblick und Ausdifferenzierungen s. **Tab. 1**).

### Verstehensorientierung

Um rein oberflächliches Lernen zu vermeiden, müssen die mathematischen Konzepte, Strategien und Verfahren aufeinander bezogen (Kilpatrick u. a. 2001) und stets durch Verständnis fundiert werden (Freudenthal 1983). Während eine Zeit lang kontrovers diskutiert wurde, ob entweder das Verständnis von Konzepten oder die Fertigkeiten im Umgang mit Verfahren (inkl. Operationen, Formeln, Algorithmen, ...) wichtiger seien, herrscht inzwischen Einigkeit darüber, dass Verständnis für Konzepte, Strategien und Verfahren gleichermaßen aufgebaut werden muss. Die Verstehensorientierung ist damit ein zentrales Prinzip für die Gewichtung der fachlichen Lernziele zueinander.

### Kognitive Aktivierung

Das Anregen von tiefgehenden, aktiven Denkprozessen (Renkl 2015) gilt in der Unterrichtsforschung als zentrales Qualitätsmerkmal, das beeinflusst, wie intensiv sich Lernende Mathematik erarbeiten (Klieme u. a. 2009, Hiebert/Grouws 2007). Anspruchsvolle Denkprozesse lassen sich nicht allein durch geeignete Aufgaben herstellen, sondern müssen auch in der Moderation durch die Lehrkraft immer wieder angeregt, unterstützt und aufrechterhalten werden (Henningsen/Stein 1997). In der Fachdidaktik wurden Ansätze der kognitiven Aktivierung (weit vor Etablierung dieses Namens) für unterschiedliche Phasen des Unterrichts ausdifferenziert – vom *entdeckenden Lernen* über das *eigenaktive Ordnen* hin zum *produktiven Üben*.

### Durchgängigkeit

Das Prinzip der Durchgängigkeit ist eine Variante des *Spiralprinzips* (Bruner 1966), das die langfristigen Lernpfade über Unterrichtseinheiten hinweg und den Unterricht über Schuljahre miteinander vernetzend in den Blick nimmt: Wenn Lernende nachhaltig lernen sollen, ist es wichtig, bei den Lernzielen diejenigen Kompetenzaspekte zu fokussieren, die langfristig relevant und für spätere Lernstufen fortsetzbar sind. Die langfristigen Zusammenhänge entlang der Curriculumspirale sollten zudem explizit immer wieder durch Anknüpfung an Vorangehendes hergestellt werden, denn mit Verknüpfung verankert sich das Gelernte besser im Gedächtnis (Prediger u. a. 2023).

### Lernendenorientierung & Adaptivität

Lernprozesse können nur gelingen, wenn typische Lernstände und Vorerfahrungen systematisch berücksichtigt und aufgegriffen werden. Zudem sollen Lernende eigene Lernwege beschreiten können, denn gerade der Verständnisaufbau sollte bei typischen Vorerfahrungen starten und diese anhand von Problemen in reichhaltigen (Kontext-)Situationen zu mathematischen Konzepten ausformen. Das Prinzip der *Adaptivität* fokussiert darüber hinaus nicht nur typische Lernstände der ganzen Klasse, sondern die heterogenen individuellen Lernstände der Einzelnen, z. B. durch Differenzierung nach Lernzielen (was ist das nächste Lernziel für dieses Kind?) und nach Anforderungsstufen (wie lassen sich die Lernaufgaben unterschiedlich unterstützen?).

### Kommunikationsförderung

Der Austausch untereinander ist aus zwei Gründen entscheidend: Lernende erwerben anspruchsvolle Lernziele nur im (angeleiteten) Gespräch, weil sie dann angeregt werden, genauer über die Dinge nachzudenken und evtl. auch zu begründen oder zu widerlegen. Dadurch wird eine tiefere Verarbeitung des Wissens angeregt. Das Kommunizieren über Mathematik wird allerdings erst gelernt und sollte für viele Schülerinnen und Schüler auch unterstützt werden. Hierfür müssen systematisch und kontinuierlich Lerngelegenheiten geschaffen werden.

Alle fünf Prinzipien gehören zu den Kernbeständen der Mathematikdidaktik, wenn auch mit unterschiedlichen Namen und Zusammenfassungen. Entscheidend ist, wie wir sie tatsächlich nutzen, um in unterschiedlichen didaktischen Handlungssituationen didaktische Entscheidungen zu treffen.

Dies soll im Folgenden durch ein Fallbeispiel (Planung einer Unterrichtseinheit zum Thema Prozente in einer 7. Klasse) erläutert werden, das vor allem auch das Zusammenspiel der fünf Prinzipien herausstellt, wie es für fünf typische **Anforderungssituationen** relevant ist (vgl. auch **Abb. 2**).

## Unterricht planen und durchführen mit den Prinzipien: Ein Beispiel (Prozente Klasse 7)

Eine Lehrkraft will eine Unterrichtseinheit zur Prozentrechnung in Klasse 7 planen und durchführen. Sie arbeitet sich durch fünf didaktische *Anforderungssituationen* hindurch, die beim Planen, Durchführen und Reflektieren von Unterricht immer wieder relevant sind (**Abb. 2**).

### Lernziele setzen und Lernpfade konzipieren

Das Blättern durch den Lehrplan und das Schulbuch geben schon ein erstes Gefühl dafür, welche Lernziele in der Unterrichtseinheit zu Prozenten im Vordergrund stehen sollen: Das Lösen der drei Grundaufgaben *Prozentwert gesucht, Prozentsatz gesucht* und *Grundwert gesucht* – im Mittelpunkt stehen meist die Verfahren (Formeln, Dreisatz).

Doch die Lehrkraft will *verstehensorientiert* unterrichten und fragt sich daher, was überhaupt der Verstehenskern der Unterrichtseinheit ist. Nicht allein der Dreisatz, sondern die Anteilsvorstellung, die durch Prozente ausgedrückt wird, ist wichtig. Daher soll diese Vorstellung als zentrales Lernziel gesetzt werden.

Zunächst fragt sie sich, was die Lernenden mitbringen (*Lernendenorientierung*). Wenn die Anteilsvorstellung im Vordergrund steht, dann muss an Vorerfahrungen mit Brüchen angeknüpft werden.

Zudem überlegt sie, welche Lernziele der Prozente-Einheit langfristig bedeutsam für weitere mathematische Themen sind (*Durchgängigkeit*): Zinsrechnung und exponentielles Wachstum sind die Themen, auf die die Einheit vorbereiten sollte. Die Prozentformel ist dafür ein wichtiger Baustein, vor allem aber das Verständnis, dass die Bestimmung von Prozentwerten (also das „Anteil-nehmen von") eine Multiplikation ist. Dieser Gedanke wird in der MatheWelt *Alles Anteile oder was? Der Weg von Anteilen zur Exponentialfunktion* in dieser Ausgabe entfaltet. Dort wird der Prozentstreifen als durchgängige Darstellung genutzt (vgl. auch **Abb. 3**).

Die Lehrkraft weiß, dass die Lerngruppe noch nicht gut über Anteile sprechen kann. Das Erklären der Bedeutungen von Prozentwert und Grundwert braucht Sprachmittel wie „der Teil von einem Ganzen". Da sie beides jedoch nicht voraussetzen kann, plant sie es als *sprachbezogene* Lernziele mit ein.

Wie kann der Lernpfad (damit gemeint ist die Sequenzierung der Lernziele und der Aufgaben durch eine Unterrichtseinheit hindurch) gestaltet sein, um *lernendenorientiert* alle bei ihren Vorerfahrungen abzuholen und sukzessive – *verstehensorientiert* – zu abstrakten Konzepten und formalen Verfahren zu bringen? Um sich nicht alles selbst auszudenken, greift die Lehrkraft zurück auf ein Unterrichtsmaterial, das bereits in einem solchen Lernpfad organisiert ist (Pöhler/Prediger 2017) und das für jede Stufe des Lernpfads auch die nötige Sprache mitberücksichtigt.

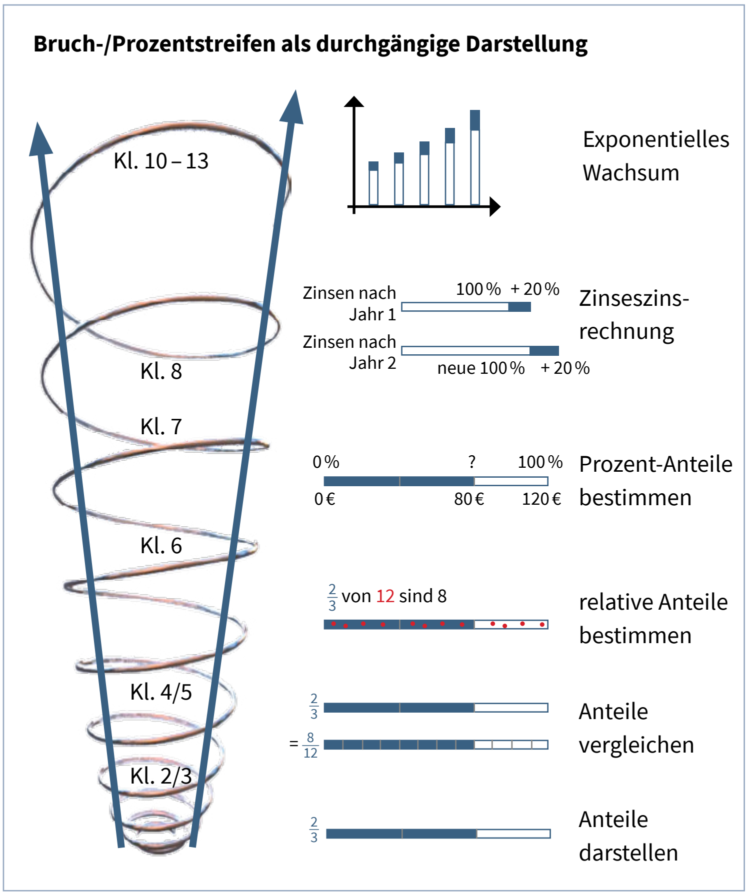



**Abb. 3**: Anteilsvorstellung und Prozentstreifen auf einer durchgängigen Curriculum-Spirale (nach Prediger u. a. 2023)

### Aufgaben und Medien auswählen und adaptieren

Der Fund eines ausgearbeiteten *verstehensorientierten* und *sprachbildenden* Unterrichtsmaterials entlang eines Lernpfads macht die Auswahl der Aufgaben leichter. Dennoch muss die Lehrkraft überlegen, für welche Phase des Unterrichts welche Aufgabe geeignet ist und welche weggelassen werden kann (vgl. **Tab. 2** für detaillierte Planungsfragen). Sie legt fest, wann das erarbeitete Wissen mit den Lernenden systematisiert und in einem Wissensspeicher gesichert werden soll. Entsprechend adaptiert sie das Unterrichtsmaterial.

### Lernstände und Lernprozesse diagnostizieren und beurteilen

Da die Klasse nur widerwillig schreibt, macht die Lehrkraft frühzeitig transparent, dass die Klassenarbeit auch Erkläraufträge enthalten wird. Zum ersten Mal nehmen einige ihrer Lernenden die Erkläraufträge wirklich ernst. Dadurch beschäftigen sie

### Lernziele setzen und Lernpfade konzipieren

Festlegen der inhalts- und prozessbezogenen Lernziele und ihrer Sequenzierung:

- Welche der Lernziele sind zentral, welche können eher peripher behandelt werden, weil weitere Unterrichtseinheiten kaum darauf zurückgreifen? (**Durchgängigkeit**)
- Was ist der Verstehenskern der Unterrichtseinheit? Welche Konzepte, Strategien und Verfahren sollen damit fundiert werden? Zu welchen übergreifenden Bildungszielen tragen sie bei? (**Verstehensorientierung**)
- Was bringen die Lernenden mit, woran in geeigneten Kontexten angeknüpft werden kann? Wie kann der Lernpfad durch die Unterrichtseinheit gestaltet sein, um Lernende bei ihren Vorerfahrungen abzuholen und sukzessive zu abstrakten Konzepten, eleganteren Strategien und formalen Verfahren zu bringen? (**Verstehensorientierung** und **Lernendenorientierung**)
- Welche Lernvoraussetzungen (insbesondere Verstehensgrundlagen) müssen bei einigen ggf. aufgearbeitet werden? Welche aufbauenden Lernziele differenzieren nach oben? (**Adaptivität**)
- Welche Sprachhandlungen und Sprachmittel brauchen die Lernenden, um über die ausgewählten mathematischen Lernziele zu kommunizieren und zu denken? (**Kommunikationsförderung**)

### Aufgaben und Medien auswählen und adaptieren

Festlegen der Aufgaben, Darstellungen, Methoden und Medien, mit denen die Lernziele der jeweiligen Phase erreichbar sind:

- Welche Darstellungen sind langfristig einsetzbar? (**Durchgängigkeit**)
- Welche Erarbeitungsaufgaben, Methoden und Medien können das Vorwissen der Lernenden mobilisieren und eigene Entdeckungen hin zu den ausgewählten Lernzielen ermöglichen? (**Kognitive Aktivierung** und **Lernendenorientierung**)
- Welche Systematisierungsaufgaben, Methoden und Medien können den Austausch über eigene Lernwege initiieren und das Wissen konsolidieren? (**Kognitive Aktivierung** und **Kommunikationsförderung**)
- Mit welchen Übungsaufgaben, Methoden und Medien kann das Gelernte in einem Lernen von- und miteinander beziehungsreich geübt, flexibel angewendet, vernetzt und langfristig verfügbar gemacht werden? (**Kognitive Aktivierung** und **Kommunikationsförderung**)

### Lernstände und -prozesse diagnostizieren und beurteilen

Beobachten der Lernstände und -prozesse, um die Angebote nachsteuern zu können:

- Mit welchen Aufgaben können Denkweisen und Lernprozesse von Lernenden möglichst informativ sichtbar gemacht werden (eigene Denkwege und Strategien, typische Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten)? (**Adaptivität** durch Diagnosegeleitetheit)
- Wie werden die nächsten Schritte auf dem Lernpfad für die Lernenden explizit? Wie werden die Lernerfolge der Lernenden wertgeschätzt? (**Lernendenorientierung**)
- Welche Beurteilungskriterien sind für die priorisierten Lernziele relevant und wie werden sie für die Lernenden transparent? (**Verstehensorientierung** und **Kommunikationsförderung**)

### Lernprozesse unterstützen & fördern

Planen, wie mögliche Hürden in den Lernprozessen ausgeräumt (Unterstützen) und die Lernenden zum Bewältigen von Hürden zunehmend befähigt (Fördern) werden können:

- Wie werden die Lernenden von ihren jeweiligen Lernständen und auf eigenen Lernwegen zum jeweils nächsten Schritt gebracht? (**Lernendenorientierung** und **Adaptivität**)
- Wie können die Lernprozesse unterstützt werden, sodass sie trotz Herausforderungen bewältigt werden können (z. B. Formulierungshilfen, Ad-hoc-Hilfen, stärkere Vorstrukturierung, ...)? Wie nimmt die Unterstützung den Lernenden nicht alles ab, sondern fördert sie, die Herausforderung in Zukunft auch allein zu bewältigen? (**Adaptivität** nach Anforderungsstufen)
- Wie können ggf. fehlende Lernvoraussetzungen aufgearbeitet werden? (**Adaptivität** nach Lernzielen und **Durchgängigkeit**)
- Wie werden die Sprachhandlungen und Sprachmittel gefördert, sodass sich alle Lernenden zunehmend beteiligen können? (**Adaptivität** nach Lernzielen und **Kommunikationsförderung**)

### Gemeinsame Gespräche moderieren

Planen, wann über was auch angeleitet kommuniziert werden muss:

- Welche Lernziele sind für die Verstehensorientierung so wichtig, dass sie ausführlich mit den Lernenden besprochen werden sollen (in angeleiteten Kleingruppengesprächen oder Plenum)? Was schaffen die Lernenden auch untereinander? (**Kommunikationsförderung** und **Verstehensorientierung**)
- Durch welche Methoden, Impulse, Arbeitsmittel kann die Kommunikation über bestimmte Ideen, Konzepte, Strategien unterstützt werden? (**Kommunikationsförderung** und **Adaptivität**)
- Wie ist das Gespräch vorzubereiten und zu moderieren, sodass der roten Faden transparent bleibt und alle Lernenden wirklich mitdenken können? (**Kommunikationsförderung** und **Kognitive Aktivierung**)
- Wie können Lernende, die an differenzierten Lernzielen entlang des Lernpfads arbeiten, im Gespräch von- und miteinander lernen? (**Kommunikationsförderung** und **Adaptivität** nach Lernzielen)

(Liste adaptiert nach Barzel u. a. 2011, S. 58ff.)

**Tab.2**: Planungs-, Durchführungs- und Reflexionsfragen für qualitätsvollen Unterricht sich intensiver damit, wie sie den Grundwert erklären und wie sie in Aufgaben herausfinden können, was berechnet werden muss (*Verstehensorientierung* und *Kommunikationsförderung*). In der ersten Klassenarbeit wird bereits der Versuch, etwas schriftlich zu erklären, wohlwollend beurteilt. In späteren Klassenarbeiten werden die Ansprüche gesteigert.

Damit die Lernenden diese inhaltlichen und sprachlichen Anforderungen auch erfüllen können, beobachtet die Lehrkraft während der ganzen Einheit, inwiefern einzelne Lernende noch weitere Unterstützung und Lerngelegenheiten brauchen. Gerade das Schreiben von Rechengeschichten, die nach dem Grundwert fragen, erweist sich dabei als diagnostisch hoch informatives Aufgabenformat (*Lernendenorientierung, Verstehensorientierung*). Gleichzeitig wird durch das Schreiben die tiefere Verarbeitung von Wissen angeregt (Glogger u. a. 2009).

Die Lehrkraft beobachtet in den Erarbeitungsaufgaben, wie die Lernenden auf dem Prozentstreifen vielfältige Rechenwege finden (*Lernendenorientierung*) – auch Schülerinnen und Schüler, denen sie das nicht zugetraut hätte. Nicht alles ist immer richtig ausgerechnet, aber das Zutrauen, es zu probieren, lobt die Lehrkraft sehr, bevor sie die Überarbeitung unterstützt. Typische Fehler werden sofort abfotografiert, um mit der ganzen Klasse darüber zu sprechen (*Kommunikationsförderung*).

Bei einigen Lernenden fehlen relevante Verstehensgrundlagen, sie wissen zum Beispiel nicht, wie man auf dem Prozentstreifen mit Multiplikation und Division hoch- und runterrechnen kann. Daher nutzt die Lehrkraft *adaptiv* die in das Unterrichtsmaterial eingebauten Gelegenheiten, Grundlagen wie das Multiplikations- und Divisionsverständnis aufzuarbeiten (*Durchgängigkeit*).

## Lernprozesse unterstützen und fördern

Der Prozentstreifen erweist sich für die meisten Lernenden intuitiv als eine sehr *verstehensförderliche* Darstellung, die eigene Denkwege sehr gut unterstützt. Dank einiger Formulierungshilfen gelingt es den meisten auch zunehmend, die Bedeutungen zu erklären (*Adaptivität, Kommunikationsförderung*).

Andere Lernende kann die Lehrkraft durch geschickte Nachfragen gut unterstützen, die Aufgaben zu bewältigen. Einzelne Schülerinnen und Schüler fordern allerdings immer wieder Hilfe ein (von ihr oder von ihren Mitlernenden), ohne erst einmal selbst zu denken. Bei ihnen würde das Denken „weg-unterstützt" werden (keine *kognitive Aktivierung* wegen nicht passender Adaptivität). Um die selbstständige Arbeit mit dem Prozentstreifen auch für diese Lernenden zu fördern, klärt die Lehrkraft im Kleingruppengespräch noch einmal (durch explizites Anknüpfen an Anteilskonzepte bei Brüchen), wie man den Teil und das Ganze und deren Beziehung im Prozentstreifen sieht. Erst danach wird der Prozentstreifen auch für diese Schülerinnen und Schüler zum Denkmittel (*Adaptivität* der Lernziele, *Kommunikationsförderung*).

Im Internet findet die Lehrkraft ein digitales Tool, mit dem man auf dem Prozentstreifen Schieberegler hin- und herschieben und damit die Ergebnisse ermitteln kann. Sie ist skeptisch, weil der nicht *kognitiv aktiviert,* sondern den Lernenden das Denken eher abnimmt (also wieder zu viel unterstützt). Dennoch kann dieses Tool sehr gut beim gegenseitigen Aufgabenstellen zum Kontrollieren eingesetzt werden. Dies regt die *Kommunikation* unter den Lernenden an, ohne das Denken „weg-zu-unterstützen".

## Gemeinsame Gespräche moderieren

Während die differenzierten Unterrichtsmaterialien auch das *individuelle* Arbeiten mit mehreren Lernstufen gut kanalisieren können und die Lehrkraft auch mit ihrer Kommunikation in Tandem- und Gruppenarbeitsphasen zufrieden ist, bleibt eine Unzufriedenheit mit den Plenumsgesprächen. Einerseits weiß die Lehrkraft, dass auch das (von ihr angeleitete) Unterrichtsgespräch entscheidend ist, um alle Lernenden an die anspruchsvollen Inhalte und an Sprachhandlungen wie das Erklären von Bedeutungen heranzuführen (*Kommunikationsförderung*). Andererseits ist es für viele Schülerinnen und Schüler schwierig, wirklich mitzudenken (*Lernendenorientierung, Kognitive Aktivierung*), gerade wenn sie vorher nicht genau dieselben Aufgaben und Lernwege selbst bearbeitet haben.

Die Lehrkraft plant deswegen genauer, an welchen Stellen die zentrale Besprechung wirklich notwendig ist. Dazu zählen ebenfalls Überlegungen zum gemeinsamen Gesprächsgegenstand. Während beispielsweise manche Lernende noch daran arbeiten zu verstehen, dass drei 10er-Schritte auf dem Prozentstreifen tatsächlich durch Multiplikation erfasst werden können, können andere komplexe Strategien zum Hoch- und Runterrechnen vorstellen. Den gemeinsamen Gesprächsgegenstand bilden dann multiplikative Strukturen am Prozentstreifen, und die stärkeren Lernenden können die zuerst vorgestellten Verstehensgrundlagen für ihre Begründungen nutzen lernen (*Durchgängigkeit*). Je besser beides visualisiert wird (etwa indem Hefteinträge unter der Dokumentenkamera gezeigt werden), desto eher können alle Lernenden mitdenken.

Auch in nicht perfekt vorbereiteten Stunden überlegt sich die Lehrkraft daher immer ein paar Fragen, um Lernende tatsächlich miteinander ins Gespräch zu bringen. Sie ermöglicht zunächst Gesprächsgelegenheiten in kleinen Gruppen, bevor die Lernenden ihre Ideen auch im Plenum kommunizieren, das schafft Sicherheit und erhöht die individuelle Redezeit (Holzäpfel 2023).

**Unterricht reflektieren mit den Prinzipien**
Die Lehrkraft blickt nach der Stunde rückblickend kritisch auf ihren eigenen Unterricht. Die fünf Prinzipien helfen ihr, den Blick auf die wichtigen Dinge zu richten. So fragt sie sich, ob sie die Lernstände ausreichend genau erfasst hat oder inwieweit ihre Aufgabenauswahl geeignet war, um die typischen Schwierigkeiten ihrer Lernenden zu diagnostizieren.

## Rückblick und Ausblick

**Prinzipien unterstützen bei didaktischen Entscheidungen und Reflexionen**
Insgesamt illustriert das Beispiel der Unterrichtsplanung zur Prozentrechnung, wie die Kombination der fünf Prinzipien die Bewältigung der unterrichtlichen Anforderungssituationen leiten kann. In **Tab. 2** sind typische Planungs- und Entscheidungsfragen aufgeführt (wenn auch keineswegs vollständig), die für die jeweiligen Anforderungssituationen leitend sein können.

Die Prinzipien unterstützen dabei, bei der Rückschau auf den Unterricht auf relevante Tiefenstrukturen zu blicken und sich nicht allein von Sichtstrukturen (wie Lautstärke) leiten zu lassen.

**Prinzipien liefern keine Rezepte**
Das Beispiel zeigt natürlich auch, dass gute didaktische Fragen noch nicht automatisch zu der immer gleichen und perfekten Antwort führen: Unterricht ist viel zu komplex, als dass es einfache Rezepte für jede Entscheidung geben könnte. Die Prinzipien geben jedoch allgemeine Orientierungen, mit denen Ideen eingebaut, adaptiert und für die eigentlichen Lernziele fruchtbar gemacht werden können, um so – auch im Team an der Schule – an der Qualität von Unterricht zu arbeiten.

## Auf das Zusammenspiel kommt es an

Die wichtigste Botschaft, die das vorgestellte Planungsbeispiel illustriert, lautet: Wer ein Prinzip absolut setzt, verpasst Wichtiges und erschwert die individuellen Lernprozesse. Im *Zusammenspiel* der fünf Prinzipien liegt die fachdidaktische Unterrichtsqualität:

- *Kognitive Aktivierung* bedarf der *Lernendenorientierung*, denn Vorstellungen und Vorerfahrungen, die Lernende mitbringen, spielen in ihren Denkprozessen eine wichtige Rolle.
- *Adaptivität* bedarf der *Kommunikationsförderung*: Nur differenzierte Arbeitsblätter (individuell) bearbeiten zu lassen genügt nicht. Erst das moderierte Gespräch unterstützt verstehensorientierte Lernprozesse.
- *Verstehensorientierung* bedarf der *Durchgängigkeit*: Je älter die Lernenden, desto schwieriger wird es für einige, Konzepte, Strategien und Verfahren zu verstehen, weil der Verstehensaufbau eine vorangehende Fundierung voraussetzt. Je konsequenter eine Schule *Durchgängigkeit* im Blick hat, desto besser lassen sich Lücken in der Bildungsbiografie aufarbeiten – je früher, desto besser.

In den unterrichtspraktischen Beiträgen dieser Ausgabe werden weitere Beispiele gegeben, die jeweils einige Prinzipien in ihren Zusammenhängen vertiefen.

**Literatur**

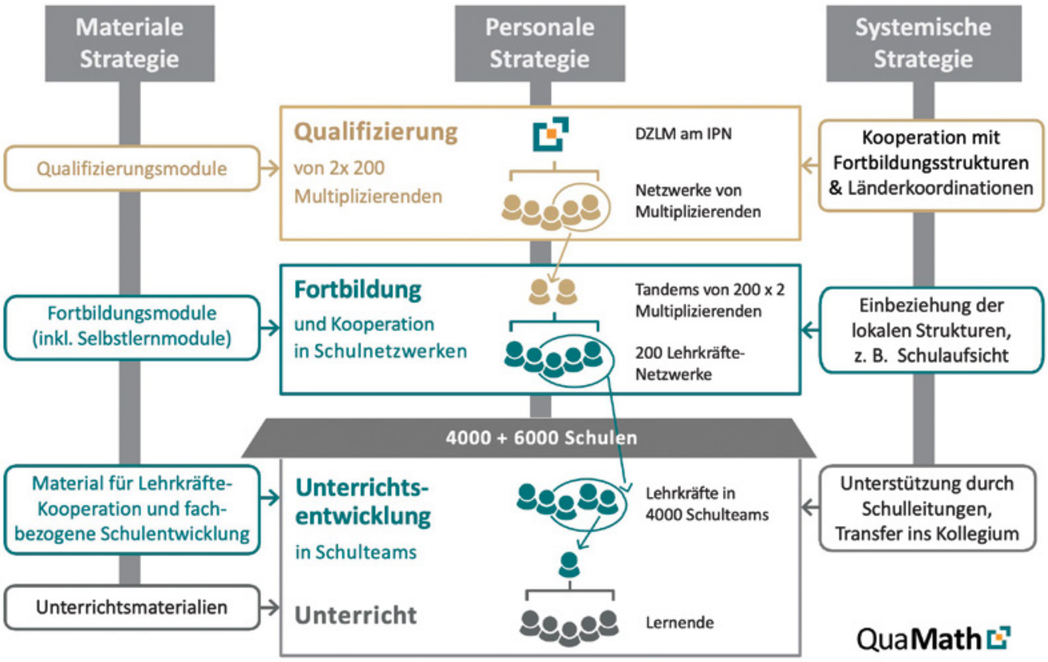
Barzel, B./Holzäpfel, L./Leuders, T. /Streit, C. (2011): Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren – Cornelsen, Berlin.
Bruner, J. (1966): Toward a theory of instruction – Harvard University Press, Harvard.
Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures – Kluwer, Dordrecht.
Henningsen, M. /Stein, M. K. (1997): Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. – In: Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), S. 524 – 549.
Glogger, I./Holzäpfel, L./Schwonke, R./Nückles, M./Renkl, A. (2009): Aktivierung von Lernstrategien beim Schreiben von Lerntagebüchern: Wie spezifisch müssen Prompts sein? – In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23, S. 95 – 104.
Holzäpfel, L. (2023): Kommunikationsförderung durch Think – Pair – Share? Auf die Aufgabe kommt es an! – In: mathematik lehren 238, S. 17 – 20.
Holzäpfel, L./Pöhler-Friedrich, B. (2024): Wie passt das alles zusammen? Mathe-Welt in mathematik lehren 242.
Hiebert, J./Grouws, D. A. (2007): The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. – In: Lester, F. K. (Hrsg.): Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning – Information Age, Charlotte, S. 371 – 404.
Kilpatrick, J./Swafford, J./Findel, B. (2001): Adding it up. Helping children learn mathematics – National Academy Press, Washington.
Klieme, E./Pauli, C./Reusser, K. (2009): The Pythagoras Study. Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. – In: Janik, T./ Seidel, T. (Hrsg.): The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom – Waxmann, Münster, S. 137 – 160.
Meyer, H. (2004): Was ist guter Unterricht? Cornelsen, Berlin.
Pöhler, B./Prediger, S. (2017): Verstehensförderung erfordert auch Sprachförderung. – In: Fritz, A./Schmidt, S./Ricken, G. (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche – Beltz, Weinheim, S. 436 – 459.
Pöhler, B./Prediger, S./Strucksberg, J. (2018): Prozente verstehen – Inklusive sprachbildende Unterrichtseinheit in Basis- und Regelfassung. OER unter sima.dzlm.de/um/7-001.
Prediger, S./Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T. (2023): Durchgängigkeit von Darstellungen und Vorstellungen für den nachhaltigen Verständnisaufbau: Spiralcurriculum praktisch gewendet. MNU-Journal.
Prediger, S./Götze, D./Holzäpfel, L./Rösken-Winter, B./Selter, C. (2022): Five principles for high-quality mathematics teaching. – In: Frontiers in Education, 7(969212), S. 1 – 15.
Renkl, A. (2015): Different roads lead to Rome: the case of principle-based cognitive skills. – In: Learning: Research and Practice, 1(1), S. 79 – 90.
Scherer, P./Weigand, H.-G. (2017): Mathematikdidaktische Prinzipien. – In: Abshagen, M./ Barzel, B./ Kramer, J./ Riecke-Baulecke, T./Rösken-Winter, B./Selter C. (Hrsg.): Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten – Klett Kallmeyer, Seelze, S. 28 – 42.

## 1 | Wissenswert: Zum großen neuen Zehnjahres-Programm QuaMath


Webseite: quamath.dzlm.de

Die in dieser *mathematik lehren* Ausgabe diskutierten Prinzipien von qualitätsvollem Mathematikunterricht bilden den Kern des Zehnjahres-Programms „**QuaMath** – Unterrichts- und Fortbildungs-**Qua**lität in **Math**ematik entwickeln“ (2023 – 2033), das von der KMK und dem Deutschen Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik gestartet und durch die Länderkooperationen mit bestehenden Landesprojekten verknüpft wird.

QuaMath will zur Stärkung der mathematischen Bildung in Deutschland beitragen, indem bis zu 10.000 Schulen und deren Lehrkräfte bei der Weiterentwicklung ihres Mathematikunterrichts durch Fortbildungen, entsprechende Materialien und die Begleitung durch Multiplizierende unterstützt werden, die Qualität ihres Unterrichts weiterzuentwickeln, in schulinternen Schulteams und schulübergreifenden Netzwerken.
Die Fortbildungen und Materialangebote werden sich kohärent auf die fünf Prinzipien beziehen und an jeweils fünf unterrichtlichen Anforderungen ausgerichtet sein.




**QuaMath-Struktur mit den drei Implementationsstrategien auf Schul-, Fortbildungs- und Qualifizierungsebene**

Grafiken: © DZLM

CLAUDIA ADEMMER, EVA PEITZ, SUSANNE PREDIGER

# „Wieso mal nehmen?“

## Lernpfad zum Verständnis der Flächeninhaltsformel

**LERNGRUPPE:** 5. – 8. Schuljahr

**IDEE:** Verstehensorientierung heißt, auch Formeln zu begründen. Angeknüpft wird dazu an das Verständnis der Multiplikation als Zählen in Bündeln, eine Verstehensgrundlage, die für die Sekundarstufe durchgängig wichtig ist.

**PRINZIPIEN:** Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Lernendenorientierung


**VORWISSEN:** Multiplikationverständnis (wird integriert aufgearbeitet)

**MATERIAL:** 12 Tücher

**WEITERES MATERIAL:** Differenziertes Aufgabenmaterial digital unter https://sima.dzlm.de/um/5-005

**ZEITBEDARF:** 2 Unterrichtsstunden (90 min plus Übungszeit)

Viele Lernende können zwar Formeln wie die für den Flächeninhalt eines Rechtecks in Standardsituationen anwenden, doch Oberflächenwissen reicht nicht: Sobald die Aufgabe etwas mehr Flexibilität verlangt, entstehen Fehler. Hier zeigt sich wieder, wie wichtig es ist, dass Formeln auch verstanden werden – wie es das Prinzip der *Verstehensorientierung* intendiert. Doch was genau umfasst das Verständnis für Formeln, und wie kann es sukzessive aufgebaut werden? Wir stellen vor, wie das Thema „Flächeninhalte von Rechtecken berechnen“ in Klasse 5 neu erarbeitet oder in Klasse 6 bis 8 wiederholt werden kann.

### Unterricht planen: Lernpfad hin zur Flächeninhaltsformel

In der Planung stellen sich dazu folgende Anforderungen, die hier exemplarisch ausgeführt werden.

#### Lernstände diagnostizieren

Oberflächenwissen zu Formeln wie $F = h \cdot b$ entlarvt man leicht, indem man die Lernenden fragt, was die Formeln bedeuten. Viele benennen nur die Variable: „$h$ ist Höhe und $b$ ist die Breite.“ Andere erklären auch, was $F$ bedeutet: „Der Flächeninhalt, das ist, wie viel kleine Quadrate da hineinpassen.“ Aber wer kann wirklich erklären, *warum* die Größen *multipliziert* werden (und nicht addiert oder dividiert)?

#### Lernziele setzen

Der kompetente Umgang mit Flächeninhaltsformeln umfasst drei Teilziele: Verständnis des Flächeninhaltskonzepts entwickeln, denn nur wer weiß, was ein Flächeninhalt überhaupt ist (Anzahl der hineinpassenden Einheitsquadrate), kann entscheiden, wann dieser im Sachkontext berechnet werden soll (statt beispielweise den Umfang).

Die *Flächeninhaltsformel kennen und anwenden können* ist das zweite Teillernziel. Viele Schulbücher betonen allein diese Fertigkeit.

Das dritte Teilziel verbindet die ersten beiden: Zur Verknüpfung des Konzeptverständnisses mit der Formel ist das *Verständnis der Flächeninhaltsformel* wichtig. Es umfasst die Fähigkeit zu begründen, warum bei Rechtecken ausgerechnet Breite und Höhe multipliziert werden soll, und was die Breite und Höhe überhaupt mit den hineinpassenden Einheitsquadraten zu tun haben. Während wir früher glaubten, Begründen wäre nur für Leistungsstärkere, haben wir inzwischen Ansätze gefunden, wie *alle* Lernenden dieses Lernziel erreichen können, wenn wir sie Stufe für Stufe erarbeiten.

#### Lernpfad konzipieren: Von Intuitionen hin zur Formel

Als Lernpfad bezeichnen wir eine Sequenz von aufeinander aufbauenden Teil-Lernzielen (genannt Lernstufen). Er wird meistens zusammen mit einer Aufgabensequenz konzipiert, mit der diese Lernstufen erarbeitet werden können. Nach dem Prinzip der *Lernendenorientierung* starten Lernpfade am besten bei den intuitiven Vorerfahrungen der Lernenden (hier im Auslegen von Flächen), daraus wird zunächst für die Konzepte (hier des Flächeninhaltskonzepts) entwickelt und erst darauf aufbauend die verstehensfundierte Formel. Die einzelnen Lernstufen (s. Abb. 1) erläutern wir hier nach und nach genauer und berichten dazu Unterrichtserfahrungen.

#### Aufgaben und Arbeitsmittel auswählen und adaptieren

Um den Lernenden zunächst intuitive Vorerfahrungen mit der Flächenbestimmung durch Zählen von Einheitsquadraten zu ermöglichen, startet unsere Erarbeitung mit einer gut vorstellbaren Kontextsituation (mit passendem Foto):

→ *Frau Ademmer möchte eine Terrasse bauen, die 12 Quadratmeter hat.*

Inhaltsverzeichnis



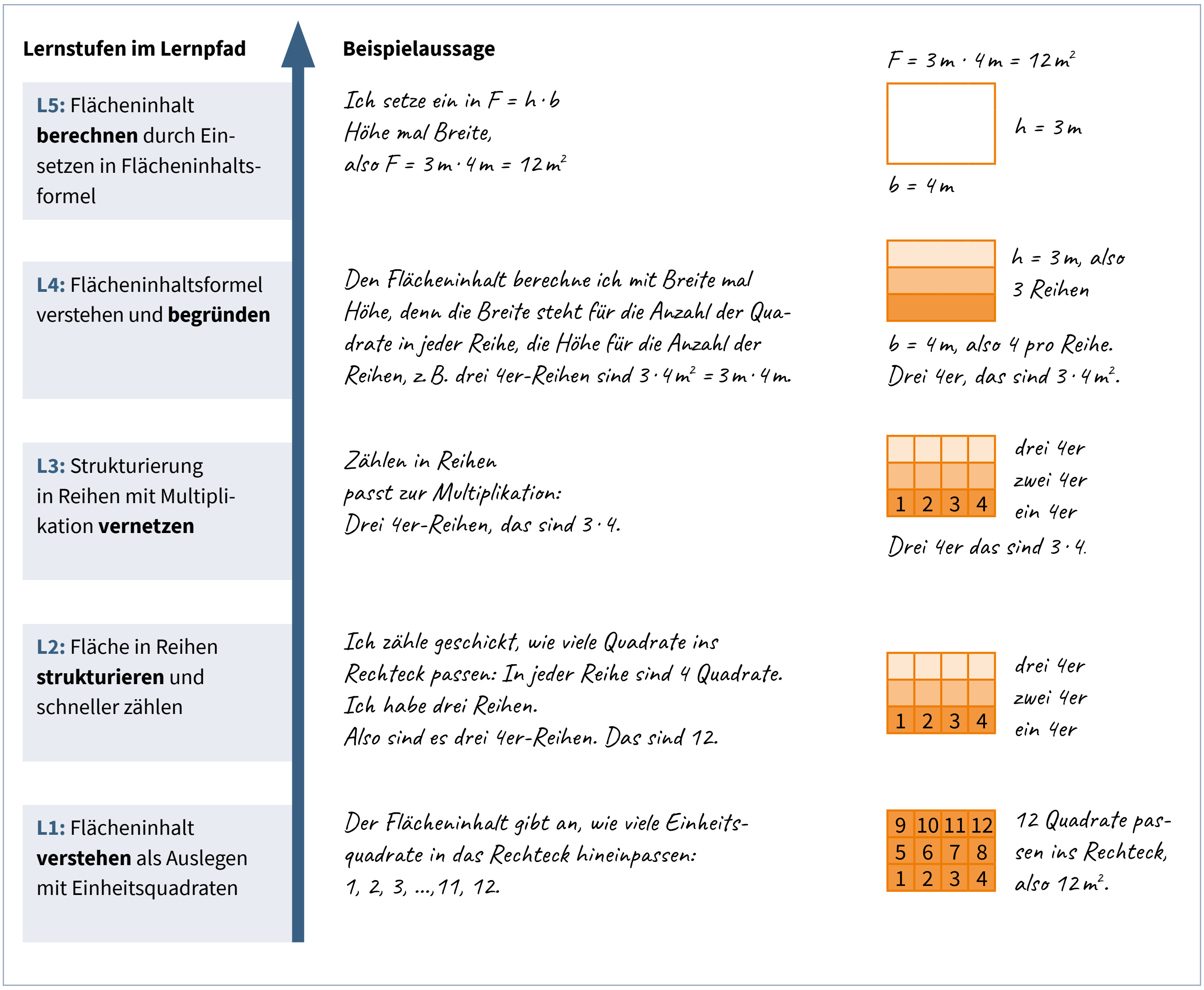



**Abb. 1**: Lerpfad mit fünf Lernstufen hin zur verstehensfundierten Flächeninhaltsformel: Multiplikation als Zählen in Reihen

*Was bedeutet das überhaupt? Und wie könnte die aussehen? Die Klasse 6a ist das Architekturbüro und sucht möglichst viele Rechteckformen für die Terrasse.*

Man könnte die 12 m² mit allen möglichen Formen auslegen (Holzäpfel u. a. 2012), wir entscheiden uns jedoch für gleich große Quadrate, die sind am einfachsten. Mit (fast) quadratischen Tüchern simulieren wir Meterquadrate, sodass die Kinder das Ausmessen praktisch erfahren können.

Im Zentrum der Doppelstunde steht der Erkundungsauftrag, mit 12 Tüchern alle möglichen Rechtecke zu legen und diese zu notieren. So erarbeiten die Lernenden ein Flächeninhaltskonzept und verstehen die Bedeutung des Flächeninhalts eines Rechtecks als die Anzahl der Quadrate, mit denen man es auslegen kann (Lernstufe L1 in **Abb. 1**).

Das Verständnis der Flächeninhaltsformel wird danach aus der Erfahrung gewonnen, wie Flächen mit demselben Flächeninhalt zu legen sind, und wie sie geschickter gezählt werden können, und zwar durch Schematisierung des Zählens in Bündeln (Lernstufe L2 in **Abb. 1)** und mit dem Gedanken der Verallgemeinerung (Battista 2004).

Fast jedes Schulbuch beginnt damit, ein Verständnis des Flächeninhaltskonzepts über das Ausmessen mit Einheitsquadraten zu entwickeln, für L1 hätten wir leicht geeignete Aufgaben finden können. Die Bücher unterscheiden sich allerdings erheblich darin, ob auch der Übergang vom Verständnis des Flächeninhaltskonzepts zum Verständnis der Formel (also L2, L3, L4) erarbeitet wird, oder ob im Lernpfad (in **Abb. 1**) vom Flächeninhaltskonzept (L1) direkt zur Formel (L5) gesprungen wird, ohne die Verknüpfung herzustellen. Nach Einführen der Formel wird in einigen Büchern auf den Übungsseiten nur noch die Fertigkeit des Einsetzens von Werten in die Formel und Ausrechnen trainiert (L5).

Wir haben daher ein Unterrichtsmaterial entwickelt (online unter https://sima.dzlm.de/um/5-005), das auch die Lernstufen dazwischen ernst nimmt. **Abb. 2** gibt einen Überblick über den Lernpfad, also die Phasen und Aufgaben der 90-minütigen Unterrichtseinheit. Diese werden mit den jeweils adressierten Lernschritten nun genauer erläutert.

Abb. 1: © S. Prediger

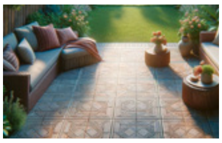
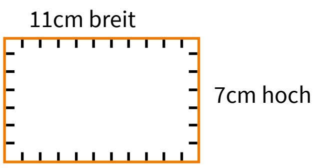
| Phase | Material für 90-minütige Unterrichtseinheit | Adressierte Lernstufe | Zeit |
|---|---|---|---|
| Erarbeiten<br>L1 (bis zu<br>evtl. L5) | **Einstiegs-Impuls am Whiteboard:**<br>Wir planen eine Terrasse mit<br>12 Quadratmetern.<br>(Was bedeutet das überhaupt?)<br> | Hinführung zu L1<br>(Flächeninhalt als<br>Auslegen mit Platten) | 5 min |
| | Handelnde **Erkundungsaufgabe** in Kleingruppen:<br>Legt aus 12 quadratischen Tüchern viele verschiedene Rechtecke.<br>Alle Tücher sollen genutzt werden. Notiert,<br>was ihr gelegt habt (als Bild oder als Text).<br>   | Alle Lernende erarbei-<br>ten sich L1 (Flächenin-<br>halt als Auslegen mit<br>Quadraten).<br><br>Einige Lernende ent-<br>decken bereits L4/L5<br>(Flächeninhaltsformel). | 15 min |
| Systemati-<br>sieren L2 / L3 | **Impulse für systematisierendes Plenumsgespräch:**<br>Erfassen und Beschreiben der Bündelstrukturen in Reihen<br>Welche Rechtecke sind gleich? Welche sind anders?<br>*Sie haben alle 12 Quadratmeter,*<br>*denn 12 Quadrate passen rein.*<br>*Einige Rechtecke sind nur gedreht, aber für*<br>*die Terrasse macht das einen Unterschied.*<br>Ist das auch eine 12er-Fläche?<br>Woher weißt du das?<br>Wie können wir möglichst geschickt zählen?<br>*Ein 4er, zwei 4er, drei 4er, also sind es 12* (L2)<br>Welche Aufgabe passt dazu? *$3 \cdot 4$* (L3) | L1 (Flächeninhalt<br>verstehen)<br>L1 (Einzeln zählen)<br><br><br>L2 (in Reihen zählen)<br>L3 (Reihenstruktur<br>mit Multiplikation<br>verbinden) | 15 min |
| Üben L2 / L3<br>B\|R\|P | **Übungsaufgaben** in Basis-, Regel-, Potenzialfassung (in der Kopfleiste markiert mit B\|R\|P): Vernetzen von Multiplikation und Fläche über Strukturierung in Reihen, Einüben der Bündelsprache<br>*vier 3er-Reihen, das sind $4 \cdot 3$, also $F = 4 \cdot 3\,m^2$*<br>Kinder mit der Basisfassung der Aufgaben arbeiten unter Anleitung der Lehrkraft am Kleingruppentisch. | L2, L3 üben<br>Potenzialgruppe ggf.<br>bereits L4/L5 | 15 min |
| Erarbeiten<br>L4 / L5 | **Impulse für erarbeitendes Plenumsgespräch:**<br>Übergang zur verstehensfundierten Flächeninhaltsformel<br>Wie viele Quadrate sind denn in dem Rechteck, wenn es 11 cm breit ist und 7 cm hoch? Zeige es mir an dem Material.<br>*11 cm breit, also 11 Quadrate in jeder Reihe*<br>*7 cm hoch, also 7 Reihen*<br>*sieben 11er-Reihen, also $7 \cdot 11$ Quadrate*<br>Wie können wir dann den Flächeninhalt berechnen?<br>*$11\,cm \cdot 7\,cm = 11 \cdot 7\,cm^2 = 77\,cm^2$*<br>Geht das immer?<br>*Ja, denn immer ist Flächeninhalt*<br>*= Reihenanzahl · Reihenbreite*<br>*= Höhe · Breite*<br><br> | L4 (Begründung der<br>Flächeninhaltsformel)<br>explizieren durch L2, L3<br>und Verallgemeinerung | 15 min |
| danach:<br>Üben L5 | Üben: Flächeninhaltsformel anwenden in Anwendungskontexten (siehe reguläres Schulbuch). Dabei in jeder zehnten Aufgabe wieder einfordern: *Zeichne auf, wieso du hier multiplizieren musst.* | L5 (Flächeninhalts-<br>formel anwenden) | 30 min |

**Abb.2**: Überblick zum Aufbau der Unterrichtseinheit hin zur verstehensfundierten Flächeninhaltsformel (= Lernpfad?)

Grafik Gartenecke erstellt mit KI (DALL·E); Fotos: © DZLM

## Unterricht durchführen

### Lernprozesse beobachten

Während des Unterrichts ist es wichtig, die Lernprozesse der Kinder zu beobachten: Wer erreicht welche Lernstufe von selbst, wer braucht welche Unterstützung? Der selbstdifferenzierende offene Auftrag, Rechtecke mit 12 quadratischen Tüchern zu legen, initiiert, dass Lernende viele Rechtecke produzieren (siehe Fotos in **Abb. 2**, Phase Erarbeiten). Dabei erarbeiten sich alle Lernenden die Lernstufe L1. Der Auftrag, die Rechtecke auch zu notieren, ermöglicht einen späteren Vergleich der Produkte.

Für einige Lernende reicht der offene Auftrag „Lege viele Rechtecke mit Flächeninhalt 12 m².“ sogar für den Sprung bis zur Lernstufe L5: Sie erfinden selbst sehr schnell, dass man geschickt zählen oder dies durch Multiplikation abkürzen kann. In der Dynamik des Unterrichtsgesprächs reicht es dann oft, wenn ein Kind ruft: „Wir nehmen einfach mal“, dann steht die Formel für alle an der Tafel.

Doch für die meisten Kinder der Klasse sind die Lernstufen L2 und L3 keineswegs selbstverständlich (Prediger/Ademmer 2019), sondern brauchen gezieltere Förderung und Unterstützung:

### Lernprozesse fördern und differenziert unterstützen

Nach einem groben Vergleich der gefundenen Rechtecke steht die Explizierung der Lernstufen L2 und L3 im Zentrum des ersten systematisierenden Unterrichtsgesprächs (siehe Abb. 2, Phase Systematisieren): Wir strukturieren unsere Quadrate in Reihen, denn damit lässt sich geschickter zählen (L2). Und zu der Strukturierung in Reihen passt die Multiplikation (L3).

Nachdem diese Lernstufen explizit angesprochen wurden, müssen sie weiter geübt werden, bevor sie bei allen gefestigt sind. Geübt wird die Lernstufe L3, das Vernetzen der Strukturierung in Reihen mit der Multiplikation. Dazu stehen Arbeitsblätter auf drei Differenzierungsniveaus bereit, die sich nicht nur in der Zahl der Aufgaben unterscheiden, sondern auch im Grad der

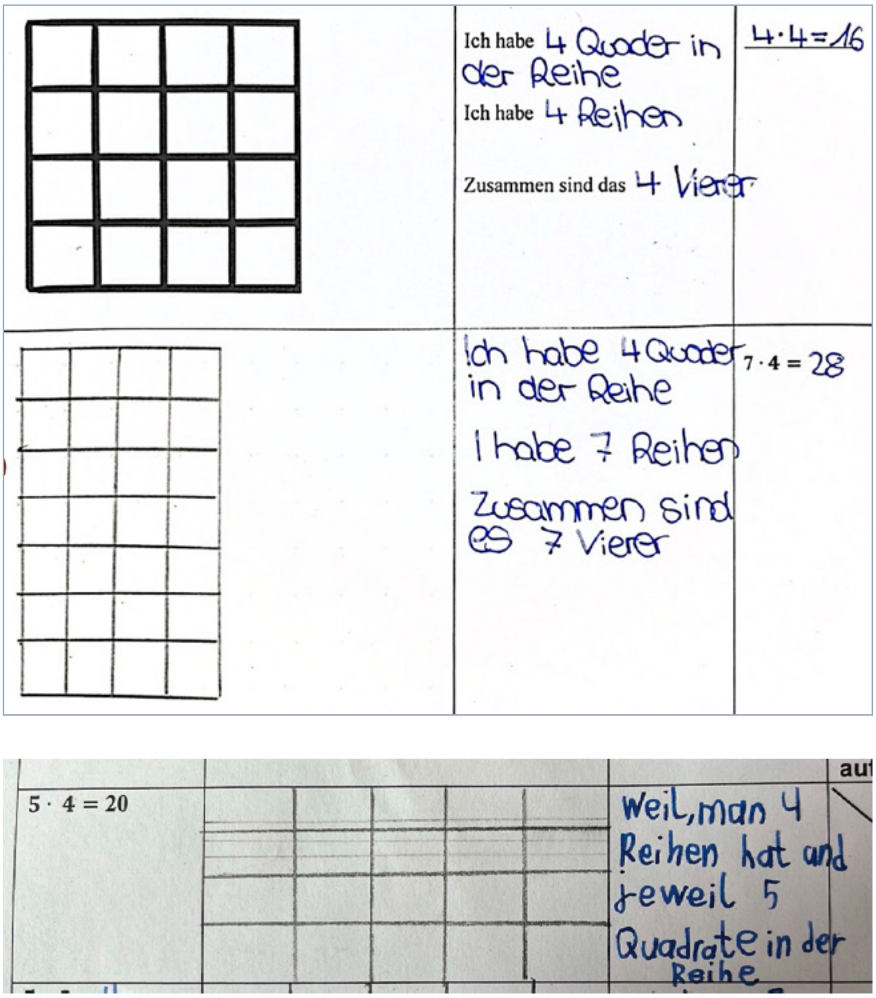



**Abb. 3**: Unterstütztes Üben: Leonie und Ahmed vernetzen die Strukturierung in Reihen mit der Multiplikation

Unterstützung: In der Potenzialfassung des Übungsblatts werden die Lernenden aufgefordert, die Strukturierung einzuzeichnen, zu beschreiben und eine Aufgabe dazu aufzuschreiben. Die Vernetzungsaufgaben werden schnell flexibilisiert. In der Regelfassung und der Basisfassung des Übungsblatts werden zusätzliche sprachliche und visuelle Hilfen als Unterstützung angeboten, **Abb. 4** zeigen beispielhafte Arbeitsprodukte der unterstützten Übungsphase.

Einige der Lernenden verfügen noch nicht über ein hinreichend sicheres Multiplikationsverständnis. Ein falsch verstandenes Unterstützen würde darin bestehen, diese Lücke in den Verstehensgrundlagen zu umgehen, indem man ihnen vorsagt, dass sie multiplizieren können.

*Fördern* der Verstehensgrundlagen dagegen setzt darauf, die Flächeninhaltsformel als Anlass zum Aufarbeiten des Multiplikationsverständnisses zu nehmen: „Sieben 4er-Reihen, das passt zu 7 · 4“, dies wird mit den Kindern des Basisniveaus in einer durch die Lehrkraft moderierten Kleingruppe erarbeitet, auch für Justin mit Förderschwerpunkt Lernen, der sich zum ersten Mal mit Multiplikation beschäftigt.

Mit der Unterstützung durch geeignete sprachliche Hilfen gelingt es Leonie und Ahmed, die Strukturierung zu beschreiben und zur Begründung der Flächeninhaltsformel heranzuziehen (**Abb. 3**).

Die stärkeren Lernenden dagegen beschreiben mit eigenen Sprachmitteln, die später mit der gemeinsamen Denksprache verknüpft wird.

### Gemeinsame verstehensförderliche Gespräche moderieren

Nachdem die Lernstufen L2 und L3 gefestigt sind, wird in einem zweiten

Plenumsgespräch der Übergang zur allgemeinen Flächeninhaltsformel gemeinsam erarbeitet. Dazu muss einerseits die Verallgemeinerung angeregt werden, um eine allgemeine Flächeninhaltsformel Höhe mal Breite zu erhalten (L4), die durch die Reihenstrukturierung begründet wird (L3). Mögliche Impulse dafür sind in Abbildung 2 bei der Phase des Erarbeitens im Plenumsgespräch abgebildet.

Gleichzeitig muss auch der Bezug zur Lernstufe L2 und L3 immer wieder hergestellt werden. Im Plenumsgespräch achtet die Lehrkraft dazu darauf, die Aufmerksamkeit aller Lernenden immer wieder auf das Zählen in Bündeln (also hier in Reihen von Quadraten) zurückzulenken und die gemeinsame Denksprache („fünf 11er, das sind 5 · 11") immer routinierter zu etablieren. Ein Beispiel für dieses Zurückgehen zur Verstehensfundierung in den Lernstufen L2 und L3 zeigt dieser Auszug aus dem Plenumsgespräch:

Emil legt die 3 × 5-Fläche mit den quadratischen Tüchern aus.

**Lehrerin**: Wie groß ist jetzt die Fläche? Zählt mal geschickt!

**Dilan**: 3 mal 5.

**Lehrerin**: Warum 3 mal 5? Zeig mir das!

**Dilan**: 3 Tücher (zeigt den Rand entlang der Grundseite) und hier die 5 Tücher (zeigt entlang der Höhe).

**Lehrerin**: Jetzt hast du mir eine Reihe mit drei Tüchern gezeigt und eine mit fünf. Aber wir wollten doch die gesamten Tücher zählen. Wer hat dazu eine Idee?

**Yasar:** Du musst die Reihen zählen. Das ist eine Reihe und das ist eine Reihe … (Yasar zeigt alle Dreierreihen.)

**Lehrerin**: Das ist eine 3er-Reihe. Zähl mal, wie viele 3er-Reihen wir haben.

**Yasar**: Eine 3er-Reihe, zwei 3er-Reihen, … fünf 3er-Reihen.

**Lehrerin**: Warum hilft es uns zu wissen, wie viele Quadrate in einer Reihe sind? ….

**Lehrerin**: Wie kommen wir jetzt von den Reihen zu dem, was Lisa behauptet hat, Höhe mal Breite?

Insgesamt kommen in einer heterogenen Klasse nicht alle in der Lernstufe L4 selbstständig an; für Leonie und Ahmed reicht es auch, in Lernstufe L3 zu bleiben, wenn sie sich die Quadrate weiter vorstellen. Für die Lernenden auf Regel- und Potenzialniveau sind die Begründungen nun führbar, entweder konkret am Zahlenbeispiel oder sogar allgemein.

### Lernstände beurteilen

Für die Lernenden zählt nur als relevant, was auch in der Klassenarbeit geprüft wird (s. den Beitrag **(Auf) schriftliche Prüfungen vorbereiten** in dieser Ausgabe). Daher ist es entscheidend, dass das geschickte Zählen, das Multiplikationsverständnis und die Begründung der Flächeninhaltsformel sowie das Vernetzen dieser drei Aspekte auch in der Klassenarbeit eine Rolle spielt. Klassenarbeitsaufgaben könnten z. B. so lauten:

→ *Basisniveau: Das Rechteck hat fünf 12er-Reihen von Zentimeter-Quadraten. Zeichne das Rechteck und berechne seinen Flächeninhalt.*

→ *Regelniveau: Das Rechteck ist 5 cm breit und 9 cm hoch. Warum kannst du den Flächeninhalt mit $F = 5\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm}$ berechnen? Begründe und zeichne ein Bild dazu.*

## Das Multiplikationsverständnis durchgängig nutzen

Das Beispiel verdeutlicht, wie stark das Verständnis der Flächeninhaltsformel vom *Verständnis der Multiplikation als Zählen in Bündeln* abhängt, das viele Kinder in dieser Doppelstunde erst noch integriert wiederholen und festigen mussten.

Immer wieder muss man sich als Lehrkraft entscheiden, welche Wissenselemente zum Lernziel für alle werden sollen. Dabei lohnt es sich, nach dem Prinzip der *Durchgängigkeit* (Prediger u. a. 2023) auf diejenigen Verstehenselemente zu fokussieren, die in vielen Zusammenhängen wichtig sind: Dass das Zählen in Bündeln und das Rechteckfeld nicht nur für das basale Multiplikationsverständnis wichtig ist, sondern entlang der Curriculumspirale immer wieder, das zeigt im Überblick **Abb. 4** (genauer in Prediger 2019). Das Zählen in Bündeln startet im Punktefeld und wird dann auf Rechtecke abstrahiert, es wird beim Messen für die Flächeninhaltsformeln und Volumenformeln vieler Figuren und Körper genutzt, bis hin zum Integral in der Vorstellung als Flächeninhalt zwischen Kurve und $x$-Achse.

Die Multiplikation als Zählen in Bündeln ist auch für das Multiplizieren von Brüchen fortsetzbar: Statt $3 \cdot 4$ als drei Vierer nehmen wir $\frac{1}{2} \cdot 4$, also einen halben Vierer oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ als die Hälfte des neuen Bündels $\frac{3}{4}$. Anteile von Anteilen sind also eine Fortsetzung vom Zählen in anderen Bündeln, diese Struktur-Analogie wird in der Rechteckdarstellung leichter zu greifen. Das Denken in Anteilen von Anteilen ist ebenso wie das Rechteckfeld schließlich bis hoch zur bedingten Wahrscheinlichkeit interessant. Diese langfristigen Zusammenhänge kann jedoch nur erarbeiten, wer ein solides, das heißt durchgängig nutzbares Multiplikationsverständnis aufgebaut hat. Es ist also gut investierte Zeit!

Justin, unser Schüler mit Förderschwerpunkt Lernen, hat in dieser Unterrichtseinheit das Multiplikationsverständnis erstmalig aufgebaut. Für ihn bleiben multiplikative Bündelungsstrukturen ab jetzt eng verbunden mit „den Tüchern in so Reihen".

In den nächsten Unterrichtseinheiten, in der multiplikative Bündelungsstrukturen auftauchen (s. **Abb. 4** entlang der Curriculum-Spirale), fragt seine Lehrerin: „Justin, wie war das nochmal mit den fünf 3er-Reihen Tüchern, wie können wir das rechnen?", und er antwortet stolz: „5 mal 3." Dann fragt sie die anderen: „Und wie können wir das jetzt nutzen, um zu berechnen, wie viel 10er-Strecken von Zentimetern in 3 dm passen?", oder: „Wie kannst du Justins Aussage nutzen, um zu begründen, warum du gerade mal 10 rechnest, um 3 dm in cm umzurechnen?"

Oder für das Distributivgesetz: „Justin, wie können wir denn $5 \cdot 8$ und $4 \cdot 8$ zeichnen?", und dann: „Wie können wir Justins Bild nutzen, um zu begründen, warum $5 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = (5 + 4) \cdot 8$ sind?" So wird das

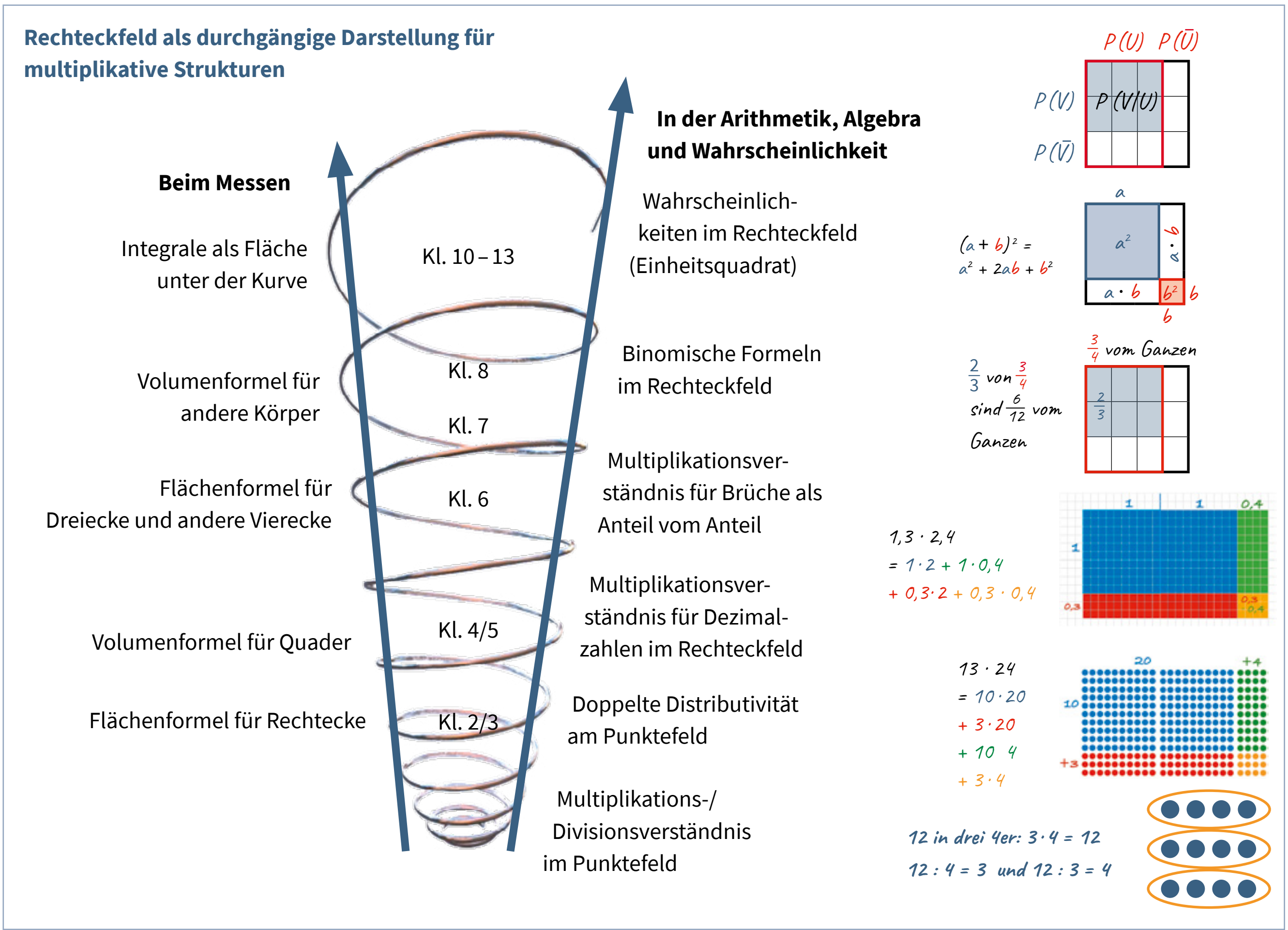



**Abb. 4**: Prinzip der Durchgängigkeit: Das Verständnis der Multiplikation als Zählen in Bündeln ist in allen Klassenstufen relevant.

Multiplikationsverständnis vom Zählen in Bündeln immer wieder fruchtbar gemacht (viele weitere Beispiele finden sich in Prediger 2019).

## Auf zu eigenen Erfahrungen

Oft hat man das Problem, dass verstehensförderlicher Unterricht zu lang dauert. Das geht uns immer dann so, wenn uns die Verstehenslücken unvorbereitet treffen und wir nicht die passenden förderlichen Aufgaben und Unterstützungen parat haben.

Unser Lernpfad hat einige typische Schwierigkeiten im Multiplikationsverständnis und im Beschreiben multiplikativer Strukturen bereits antizipiert. Er ist in zwei Einzelstunden umzusetzen, wenn die Lernenden bereits gewohnt sind, ihre Strukturierungen zu verbalisieren. Falls nicht, dauert es vielleicht eine dritte Stunde – aber auch die lohnt sich, da das Verbalisieren als langfristige Kompetenz immer gebraucht wird. Probieren Sie es doch aus! Das Material finden Sie unter https://sima.dzlm.de/um/5-005.

### Literatur

Ademmer, C./Prediger S. (2023): Flächeninhaltsformel für Rechtecke verstehen und begründen: Verstehens- und sprachförderliches Unterrichtsmaterial für die Sekundarstufe 1. DZLM. Open Educational Resources unter sima.dzlm.de/um/5-005

Battista, M. T. (2004): Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. – In: Mathematical Thinking and Learning, 6(2), S. 185 – 204.

Götze, D. (2019): Language-sensitive support of multiplication concepts among at-risk children. – In: Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 17(2), S. 165 – 182.

Holzäpfel, L./Leuders, T./Marxer, M. (2012): Lebensraum Zoo – Platzbedarf von Tieren. – In: Barzel, B./ Hußmann, S./ Leuders. T./ Prediger, S. (Hrsg.), Mathewerkstatt 5. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S. (2019): Mathematische und sprachliche Lernschwierigkeiten – Empirische Befunde und Förderansätze am Beispiel des Multiplikationskonzepts. – In: Lernen und Lernstörungen, 8(4), S. 247 – 260.

Prediger, S./Ademmer, C. (2019): Gemeinsam zum Volumen von Quadern: Eine inklusive und sprachsensible Unterrichtsreihe. – In: mathematik lehren 214, S. 13 – 18.

**D** **Differenzierung auf den Punkt gebracht**

**Aspekte der Heterogenität:**
- Lernstufen
- Vorwissen Multiplikationsverständnis

**Methode:**
- kooperativ Erarbeiten – gemeinsam Systematisieren und dabei Lernstufen verknüpfen
- paralleldifferenziertes Üben

**Praxistipp:**
Dem Verständnis der Flächeninhaltsformel (Lernstufe 3) immer wieder Zeit und Lerngelegenheit geben. Dazu gibt es mit dem Flächentool auch eine digitale dynamische Visualisierung und Übungsformate unter sima.dzlm.de/um/5-005

BÄRBEL BARZEL, OLIVER GIRNTH, OLIVER WAGENER, SUSANNE PREDIGER

# Wer spielt besser?

## Aktives Lernen auf eigenen Wegen von Verlässlichkeit zur Spannweite

**LERNGRUPPE:** 5. – 10. Schuljahr

**IDEE:** Um sportliche Leistungen fair zu vergleichen, kann man mit verschiedenen Kenngrößen argumentieren. Die Verlässlichkeit wird mit Streumaßen wie Spannweite oder mittlere Abweichung zunehmend genauer erfasst.

**PRINZIPIEN:** Kognitive Aktivierung, Lernenden-Orientierung & Adaptivität

**VORKENNTNISSE:** Erst-Erarbeitung der Mittelwerte ist mit dem Material möglich. Sind Mittelwerte und Spannweiten bekannt, eignet sich die Einheit zur vernetzenden Wiederholung, bei der ggf. die mittlere Abweichung neu erarbeitet werden kann.

**ARBEITSBLATT 1–3:** Datensätze vergleichen, statistische Kenngrößen erarbeiten

**ZEITBEDARF:** 3 – 4 Unterrichtsstunden (2 Stunden plus Übungszeit, falls einiges bekannt, sonst 3 – 4 Stunden plus Übungszeit)

Aktives eigenes Denken ist Voraussetzung für nachhaltiges Lernen, dieses Prinzip der *Kognitiven Aktivierung* (Henningsen/Stein 1997) gilt für alle Phasen, das Erarbeiten, Systematisieren und Üben. Gerade im Erarbeiten ist nach dem Prinzip der *Lernendenorientierung* wichtig, an den intuitiven Ideen der Lernenden anzusetzen und diese auszubauen zu den regulären mathematischen Konzepten (Gallin/Ruf 1990) und danach zu Strategien und Verfahren (Selter 1993). Wie dies möglich ist, zeigen wir hier am Beispiel Datenvergleich mit statistischen Kenngrößen.

### Erarbeiten mit reichhaltigen offenen Aufgaben und aktivierenden Impulsen

#### Aufgaben und Medien auswählen und adaptieren

Die Inspiration für die Wahl der konkreten Einstiegsaufgabe zum Datenvergleich beim Basketball (Aufgabenidee z. B. bei Lengnink 2009) kam aus der ZDF-Mediathek: In Leschs Kosmos wurde anhand dieser Aufgabe über Befunde der Lehr-Lernforschung berichtet, dass aktives Erarbeiten tatsächlich lernwirksamer ist als ein rein nachvollziehendes Lernen (Loibl u. a. 2017).

Die von uns genutzte Aufgabenstellung ist in **Abb. 1** abgedruckt, wir haben sie so adaptiert, dass sie von Klasse 6 bis Klasse 10 eingesetzt werden kann.

#### Lernziele setzen und Lernpfade konzipieren

Mathematisch geht es in der Aufgabe um statistische Kenngrößen, sowohl um zwei Maße für den Mittelwert (Zentralwert, auch genannt Median und Durchschnitt, auch genannt arithmetisches Mittel) als auch um Streumaße (wie Minimum, Maximum, Spannweite und gegebenenfalls mittlere Abweichung).

Die Lernenden unserer Klassen 6 und 7 kannten Mittelwerte bereits, die meisten auch Minimum, Maximum und Spannweite. So konnten wir auf das Lernziel fokussieren, mit den statistischen Kenngrößen im Sachkontext datenbasiert zu argumentieren. Der Ausbau dieser prozessbezogenen Kompetenz kann auch dazu beitragen, den Sinn statistischer Kenngrößen zu erfassen. In Klasse 8 – 10 kann außerdem die mittlere Abweichung und sogar die Standardabweichung ausgehend von dieser Aufgabe erarbeitet werden.

Die Einheit beginnt mit der Einstiegsaufgabe in **Abb. 1**, um zunächst die „Daten sprechen zu lassen", die Lernenden anzuregen, das Problem zu erörtern, verschiedene Argumente zu sammeln und auszutauschen. Lernendenorientiert werden dabei intuitive Ideen hervorgelockt, um im Sachkontext bereits wichtige konzeptuelle Ideen vorzubereiten (Freudenthal 1973).

Die Teilaufgabe „Nachgedacht" regt die erste Modell-Reflexion an. Erst mit der zweiten Aufgabe werden die neuen mathematischen Konzepte (wie Spannweite und mittlere Abweichung) ausgehend von den intuitiven Ideen der Lernenden über die zunehmend formalere Fassung des Konzepts und seiner Berechnungswege entwickelt, der so konzipierte Lernpfad wird im Folgenden durch die weiteren Aufgaben erläutert.

#### Lernprozesse beobachten und unterstützen

Doch zunächst ist es während der Gruppenarbeit zur Erarbeitungsaufgabe (aus **Abb. 1**) wichtig, den Lernenden den nötigen Freiraum zu geben, sodass eigene Ideen entstehen, geäußert, diskutiert und gegebenenfalls verworfen werden können. Daher kann man sich als Lehrkraft zurückhalten und zunächst vor allem beobachten, wie die Lernenden denken: Wer gibt sich mit schnellen Antworten zufrieden, wer argumentiert tiefgehender?

Impulse sollte man in dieser Erarbeitungsphase nur dafür setzen, die kognitiven Aktivitäten der Lernenden zu intensivieren und oberflächliche Herangehensweisen zu vertiefen.

So wäre es bei einer Lernendenäußerung wie „Der Durchschnitt ist bei beiden 24, also macht es keinen Unterschied, weil es gleich ist“ gut, in Bezug auf den Realkontext zu spiegeln, dass es dann für den Trainer ja egal sei, wie er sich entscheiden würde. So kann das Argumentieren ggf. um weitere Kriterien angereichert werden.

„Wenn die anderen Mitspieler gut sind, würde ich Spieler 2 nehmen. Wenn die anderen Spieler mittel sind, Spieler 1. Wenn alle schlecht sind, würde ich wieder Spieler 2 nehmen. Dann könnte man noch gewinnen.“ Diese detaillierte Empfehlung eines Schülers an den Trainer nimmt den Kontext sehr ernst. Als Lehrkräfte können wir sie verstärken und z. B. durch eine Frage nach konkreten Unterschieden der Treffererfolge ggf. unterstützen, den Fokus zu einer mathematischeren, also hier datengestützten Argumentation zu erweitern.

Dagegen sollte man in der Erarbeitungsphase Impulse vermeiden, die lediglich der schnellen Bewältigung der Aufgabe dienen, wie z. B.: „Denke doch mal an die Spannweite, wer wäre denn dann besser?“ Denn sie nehmen den Lernenden das Denken ab, statt die kognitiven Aktivitäten zu intensivieren.

## Lernprozesse diagnostizieren: Perlen finden in den intuitiven Ideen

Eine lernendenorientierte Diagnose dient dazu, in den intuitiven Ideen zur offenen Einstiegsaufgabe die „Perlen zu finden“, welche sich später zu den regulären mathematischen Konzepten ausbauen lassen (Selter 1993; Lengnink 2009). **Abb. 2** zeigt solche Perlen, die fruchtbare Anknüpfungsmöglichkeiten an die regulären Konzepte bieten, also an die statistischen Kenngrößen. So zeigen die Lernendenprodukte, dass Selma und Leon zwar den Durchschnitt berechnen, damit aber nicht explizit argumentieren. Klara dagegen nutzt das Maximum explizit für ein mathematisch gestütztes Argument.

Viele Lernende entwickeln intuitive Ideen zur fehlenden Verlässlichkeit, ausgedrückt als „ungleichmäßig“ (Leon), „Risiko“ (Ali und Klara), „manchmal mega schlecht und manchmal mega krass“ (Murad). Verlässlichkeit wird adressiert als „immer relativ durchschnittlich“ (Zeynep), „konstanter“ (Derek) oder „gleichmäßig“ (Leon).

Drei Lernende entwickeln sogar schon Ansätze, wie diese intuitiven Ideen zur Streuung auch mathematisch gefasst werden können: Klara betrachtet das Maximum, Murad die „Differenz zwischen der größten und kleinsten Zahl“ (d. h. die Spannweite), und Zeynep formuliert etwas, das sich später ausbauen lässt zur mittleren Abweichung, nämlich „entweder sehr weit über dem Durchschnitt (41) oder sehr unterdurchschnittlich (9)“ (Zeynep).

Manchmal muss man zweimal lesen, um die Perlen in diesen Formulierungen zu finden. Daher kann es hilfreich sein, die Lernendenprodukte am Ende der Stunde einzusammeln und erst in Ruhe zu sichten: Welche Ideen beinhalten Perlen, welche können nicht für die regulären Konzepten genutzt werden oder sind sogar falsch? Dies hilft bei der didaktischen Entscheidung, wie man damit in der nächsten Stunde weiterarbeiten kann.

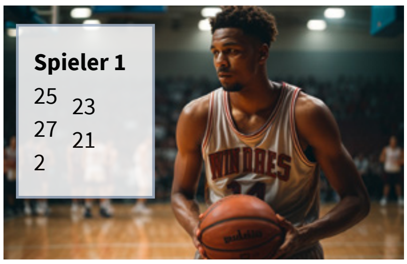
## Gemeinsame Gespräche moderieren: Echte Herausforderung

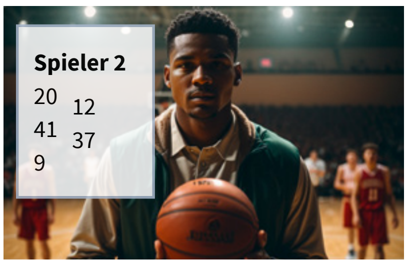
Produktiv wird „productive failure“ nur, wenn im Anschluss an die eigenständige Erarbeitung die Ideen tatsächlich für alle weiter aufgearbeitet und mit den mathematischen Konzepten verknüpft werden, denn dies schaffen nur wenige Lernende allein. Ein gemeinsames Unterrichtsgespräch nach einer solchen Erarbeitungsphase zu führen, ist allerdings durchaus herausfordernd für Lehrkräfte. Denn moderiert werden muss so, dass die wichtigen Ideen nicht untergehen und alle mitdenken können. Hilfreich sind folgende Strategien für eine aktivierende Gesprächsführung (vgl. Barzel/Ebers 2020):

- Fehler nicht direkt kommentieren, sondern Impulse setzen, dass diese selbst erkannt und korrigiert werden (z. B. „Kann das stimmen?“)
- Interaktion unter den Lernenden anregen, um die Auseinandersetzung mit Gedanken anderer bewusst auszulösen (z. B. „Was sagen die anderen dazu?“)
- Methoden wie „Ich-Du-Wir“ (bzw. „Think-Pair-Share“) auch im Plenumsgespräch nutzen, um alle am Mitdenken zu beteiligen (z. B. „Denkt mal kurz einzeln nach, ob

### 1 Leistungen beim Basketball – Wer ist besser?

Der Trainer muss sich für das nächste Spiel entscheiden, welchen von zwei Spielern er einsetzt. Die Spieler haben in den letzten 5 Spielen unterschiedlich oft getroffen. Für welchen Spieler sollte er sich entscheiden?




**Nachgedacht**

- Welche Argumente habt ihr gefunden, um die Leistungen der zwei Spieler zu vergleichen?
- Was genau wird dabei jeweils verglichen?
- Wie könnte man noch vergleichen?

**Abb. 1**: Offene, reichhaltige Einstiegsaufgabe zum aktivierenden Erarbeiten statistischer Kenngrößen

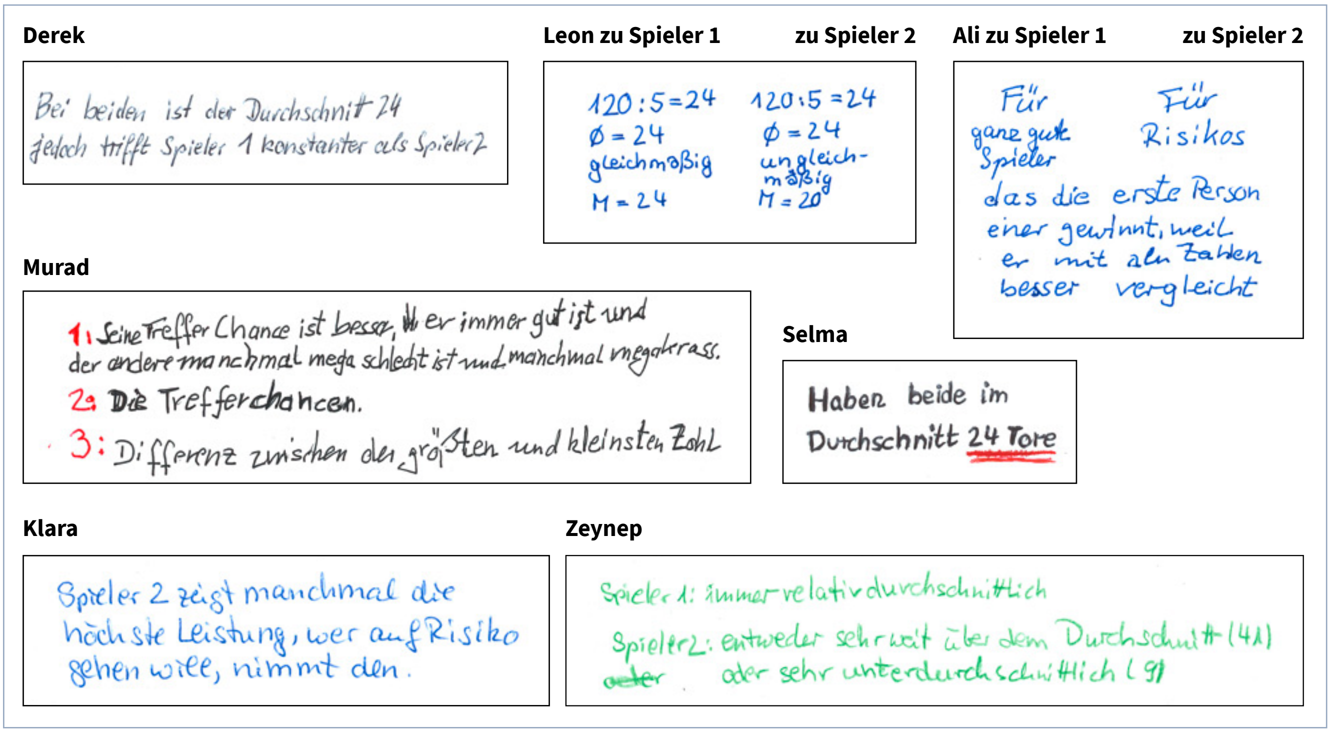



**Abb. 2**: Argumente von Lernenden zum Datenvergleich in der Basketball-Aufgabe

das stimmen kann, dann tauscht euch zu zweit aus, bevor wir zusammen weitermachen.")
- Reflexion und Metakognition anregen (z. B. „Wie hilft uns diese Idee weiter?")
- Wichtige Ideen herausheben und allen zugänglich machen (z. B. „Deine Idee finde ich sehr spannend, habe ich das richtig verstanden, dass du das so … meinst?")
- Wichtige Ideen herausheben und rephrasieren lassen (z. B. „Ich ahne, was du meinst und finde es sehr interessant. Kann mir jemand die Idee noch einmal anders erklären, damit ich sicher bin, dass ich sie richtig verstanden habe?")

### Aufgaben adaptieren, um Fokussierung für alle zu erreichen

Leichter fallen die Unterrichtsgespräche dann, wenn die Lernenden vorher auch Aufgaben bearbeitet haben, die die zentralen Ideen stärker fokussieren, sodass mehr Lernende sie bereits durchdenken konnten. Dabei braucht es auch Anlässe, sich die Bedeutungen der genutzten Konzepte zu verdeutlichen. In unserem Unterrichtsmaterial ermöglichen wir dies, indem wir die Kenngrößen mit einer graphischen Darstellung in einer weiteren Aufgabe vernetzen. Dazu wählen wir den Kontext Weitsprung, in dem die graphische Darstellung mit horizontalen Balken naheliegt (**Abb. 3**).

Die in **Abb. 3** eingefügten drei Lernendenprodukte zeigen, wie Ella durch Darstellungswechsel verdeutlicht, was der Zentralwert bedeutet (im Balkendiagramm liegen drei Werte drüber und drei drunter), und wie Luca die Schwankungsbreite skizziert (Spannweite). Die Antwort von Max zeigt, wie er mit zwei verschiedenen Kenngrößen (Maximum und Vorläufer der Spannweite) argumentiert. Doch auch diese fokussiertere und graphisch unterstützte Aufgabe bleibt für einige noch zu flüchtig, wenn sie nicht systematisiert und dauerhaft gesichert wird.

## Systematisieren mit vorstrukturierten Aufgaben

### Lernprozesse fördern: Intuitive Ideen für alle zugänglich machen

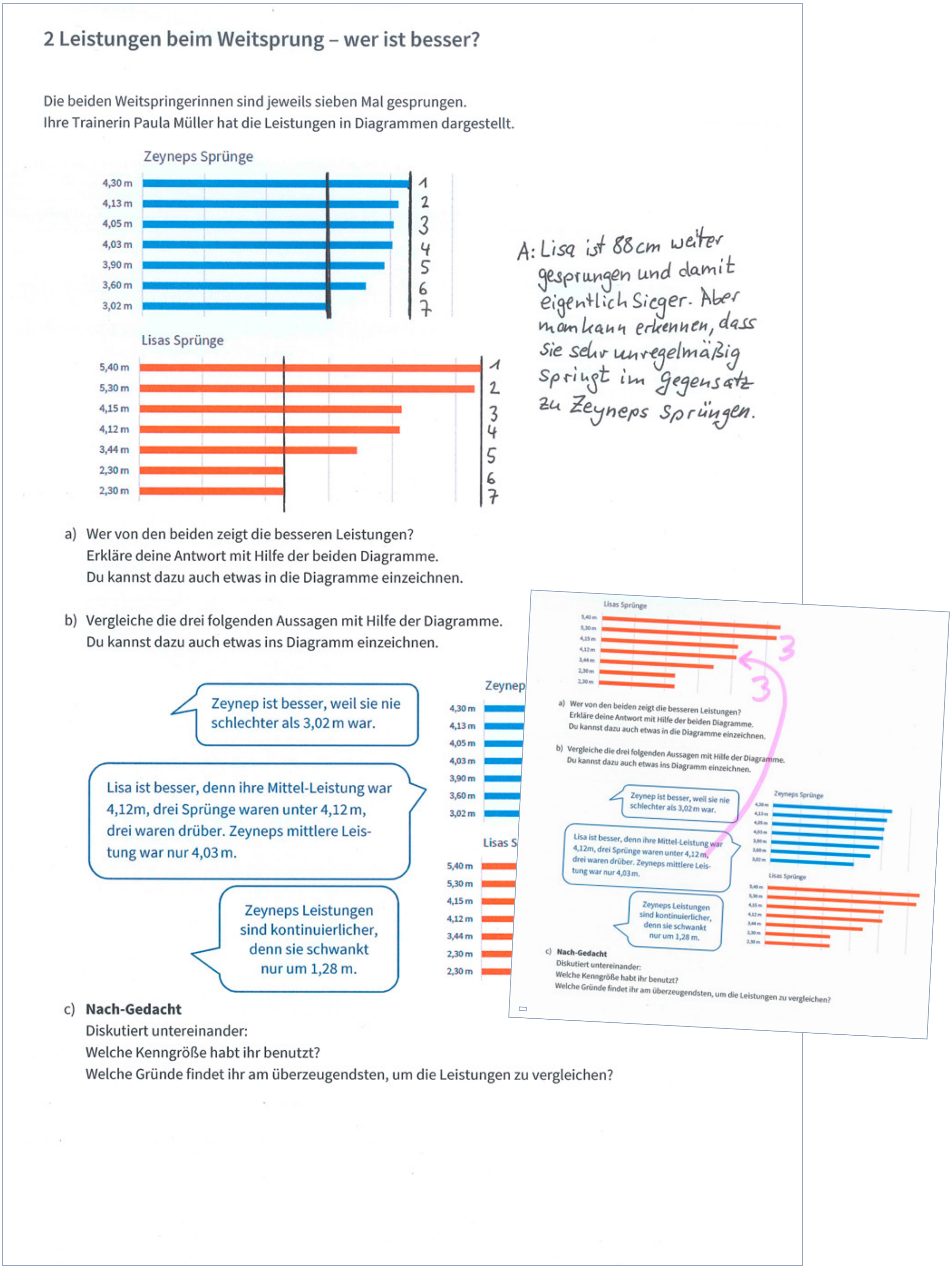
Das Ziel der Systematisierungsphase muss es sein, die typischen intuitiven Ideen der Lernenden aufzugreifen und für alle Lernenden mit den regulären Kenngrößen und ihren Bestimmungswegen zu verknüpfen (Prediger u. a. 2011). Dabei kommt es nicht zwangsläufig darauf an, jede einzelne individuelle Idee aufzugreifen, sondern sich auf die typischen intuitiven Ideen zu konzentrieren (dies unterscheidet Lernendenorientierung von individueller Adaptivität).

Das ist insofern ein wichtiger Unterschied, als man die Weiterarbeit mit typischen Ideen so gut planen kann und nicht spontan reagieren muss. Im Unterrichtsmaterial tauchen sie als Sprechblasen auf, sodass auch die restliche Klasse darüber in Ruhe nachdenken kann. Dies ist ein Vorteil gegenüber mündlich eingebrachten Ideen, die von einigen Lernenden nur oberflächlich übernommen statt gründlich durchdacht werden.

### Aufgaben adaptieren: Zwischen Aktivierung und Zielorientierung

Die Systematisierungsphase soll also
- typische intuitive Ideen der Lernenden aufgreifen
- mit den regulären mathematischen Konzepten verknüpfen
- und dabei das Verständnis der Konzepte und Formeln sichern.

Dies erfolgt möglichst nicht durch einen klassischen roten Kasten, der nur



## 2 Leistungen beim Weitsprung – wer ist besser?

Die beiden Weitspringerinnen sind jeweils sieben Mal gesprungen.
Ihre Trainerin Paula Müller hat die Leistungen in Diagrammen dargestellt.



a) Wer von den beiden zeigt die besseren Leistungen?
Erkläre deine Antwort mit Hilfe der beiden Diagramme.
Du kannst dazu auch etwas in die Diagramme einzeichnen.

b) Vergleiche die drei folgenden Aussagen mit Hilfe der Diagramme.
Du kannst dazu auch etwas ins Diagramm einzeichnen.



c) **Nach-Gedacht**
Diskutiert untereinander:
Welche Kenngröße habt ihr benutzt?
Welche Gründe findet ihr am überzeugendsten, um die Leistungen zu vergleichen?

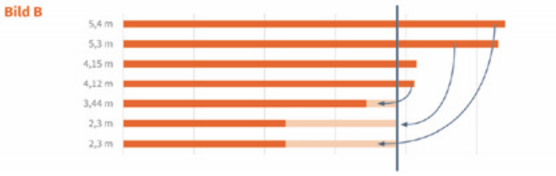
Abb. 3: © DZLM

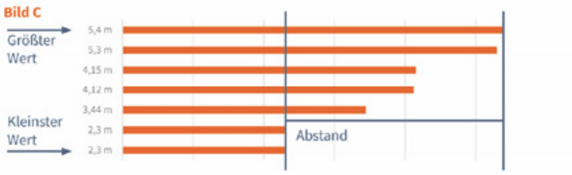
**Abb. 3**: Fokussierte Aktivierung in zweiter Erarbeiten-Aufgabe (mit drei Lernprodukten)

## 3 Datensätze vergleichen

Beim Vergleichen von Daten kann man unterschiedlich argumentieren.
Die Argumente nutzen verschiedene Kenngrößen, diese werden in dieser Aufgabe eingeführt und systematisiert.

a) Zwei Weitspringerinnen sind jeweils sieben Mal gesprungen.
Die Trainerinnen argumentieren unterschiedlich, wer bessere Leistungen zeigt.
Welches der drei Bilder A, B und C passt zu den vier Aussagen?
**Elif:** Lisa hat den besten Sprung, 5,40 m!
**Mia:** Lisas ist unberechenbarer, ihre Leistungen schwanken um 3,10 m.
**Vera:** Beide sind durchschnittlich gleich gut, die Abweichungen gleichen sich aus.
**Ali:** Aber der mittlere Wert, der ist bei Lisa besser, 4,12 m statt 4,03 m.


Man setzt Teile von den oberen Werten nach unten, sodass am Ende alle Sprünge gleich sind

b) Zwei Trainerinnen haben auch gerechnet, nicht nur gezeichnet. Ordne zu: Zu wem gehört welche Rechnung? Erkläre, warum genau dieses Bild zum Argument passt.

**Rechnung 1**

5,40
+ 5,30
+ 4,15
+ 4,12
+ 3,44
+ 2,30
+ 2,30
27,01

27,01 : 7 = 3,86

**Rechnung 2**

5,40m – 2,30m
= 3,10m

Rechnung 1 passt zu Bild A, weil dort die Schwankung gezeigt wird.
5,40 m = bester Sprung
2,30 m = schlechtester Sprung
3,10 m = Schwankungen

c) Auch bei anderen statistischen Daten muss man Daten vergleichen.
Beim Argumentieren über den Vergleich nutzt man fünf Kenngrößen immer wieder.
Welche Kenngröße gehört zu welchem Bild und zu welcher Rechnung aus Aufgabe 3?
Erkläre, warum diese Kenngröße zu diesem Bild und dieser Rechnung passt.
**Maximum**: der größte Wert
**Minimum**: der kleinste Wert
**Spannweite**: Abstand zwischen größtem und kleinstem Wert
**Zentralwert**: Alle Werte der Größe nach sortieren und dann den mittleren Wert nehmen, bei dem genauso viele Werte darüber- wie darunterliegen.
**Durchschnitt**: Alle Werte addieren und durch die Anzahl der Werte teilen.
Oder: Ausgleichen, bis alle dasselbe haben.

d) Welche der Kenngrößen kann man gut benutzen, wenn man über die **Verlässlichkeit** argumentieren will?

**Abb. 4**: Aufgabe zum aktiven Ordnen der Bedeutung der Kenngrößen (mit einigen Lösungen) noch abzuschreiben ist, sondern – gemäß dem Prinzip der kognitiven Aktivierung – als aktives Ordnen (Prediger u. a. 2011). Die Aktivierung darf allerdings nicht wieder so offen sein, dass alle Lernenden andere Ergebnisse produzieren, sondern soll zielorientierter auf das zu konsolidierende Wissen führen. Dies geht am besten durch die Anregung von kognitiven Aktivitäten, die tatsächlich zur Konsolidierung des Wissens führen (Swan 2007):

- Darstellungen zuordnen (in allen Teilaufgaben von **Abb. 4**) und Vernetzung der Darstellungen erklären (wie in Teilaufgabe 3b und c)
- Richtig/Falsch-Bewertungen mit Begründung
- Beispiele und Gegenbeispiele einordnen lassen.

Durch das Bereitstellen von auswählbaren Lösungen wird nicht von allen Lernenden erwartet, die Lösung vorher vollständig durchdrungen zu haben. Vielmehr regt diese Auswahl besonders jene Lernende an, die noch nicht mit der Lösung vertraut waren. Gleichzeitig ermöglicht diese Herangehensweise im Vergleich zu offenen Aufgaben einen gezielteren kognitiven Prozess und fördert somit einen fokussierten Lernweg.

### Gemeinsame Gespräche moderieren: Vorstrukturierung unterstützt

Nach Bearbeitung der Ordnen-Aufgabe ist ein (durch die Lehrkraft angeleitetes) gemeinsames Gespräch wichtig, denn nicht alles erarbeiten sich die Lernenden erfolgreich selbst, z. B. tauchten oft Vermischungen von Durchschnitt und Zentralwert auf, Bild A wurde z. B. als Durchschnitt interpretiert, während die Ausgleichsvorstellung in Bild B nicht von allen Lernenden mit dem Durchschnitt verknüpft wurde. Diese Unvollständigkeiten lassen sich jedoch anhand der vorstrukturierten Aufgabe transparenter und klarer besprechen als nach der ganz offenen Erarbeitungs-Aufgabe 1.

Auch hier bei Gesprächen zum Ordnen sind die oben genannten Strategien zum Erhalt der kognitiven Aktivierung hilfreich, um möglichst viele Lernende aktiv zu beteiligen und das Verständnis der regulären mathematischen Konzepte möglichst stabil durch Anknüpfung an die vorherigen intuitiven Ideen zu konsolidieren.

In unseren Unterrichtserprobungen waren die Lernenden dadurch am Ende in der Lage, den Trainer mithilfe von mathematischen Argumenten verlässlich zu beraten.

## Fazit: Zusammenspiel von Aufgaben, Methoden und Impulsen

Die Forschungserkenntnisse sind eindeutig (Loibl u. a. 2017): Kognitiv aktivierende Erarbeitungen mit offenen Problemstellungen und einer Systematisierung durch explizite Anknüpfung an reguläre Konzepte erzeugen konsolidierteres Wissen bei den Lernenden als Zugänge, die möglichst schnell zur ersten Aufgabenbewältigung führen. Das Prinzip der fokussierten kognitiven Aktivierung wurde für alle Phasen des Unterrichts als lernwirksam empirisch nachgewiesen (Renkl 2015), fachdidaktisch realisiert durch das lernendenorientierte Anknüpfen an intuitive Ideen.

Notwendig sind dazu nicht nur gute erste Erarbeitungsaufgaben, sondern auch geeignete Methoden und Impulse, die reichhaltige kognitive Aktivitäten aufrechterhalten, aber ein Lernen auf eigenen Wegen auch nicht missverstehen als Entzug jeglicher Anleitung oder gemeinsamer Besprechung. Wenn die richtige Balance zwischen eigenständigem Denken und Zielorientierung gelingt, können Lernende sich als Mathematiktreibende erleben und Verständnis aufbauen.

### Einladung zum Ausprobieren

Gerne können Sie das Unterrichtsmaterial (Barzel/Prediger 2023) selbst in Ihrer Klasse erproben, wir freuen uns auch über E-Mails mit interessanten Lernendenbearbeitungen!

### Unterrichtsmaterial

Barzel, S./Prediger, S. (2023): Wer ist besser? Daten mit mehreren Kenngrößen vergleichen. Unterrichtsmaterial für Klasse 5 – 10. DZLM. Open Educational Resources, http://quamath.dzlm.de/um/sek1/003

Video aus Lesch Kosmos unter https://www.zdf.de/wissen/leschs-kosmos/lernen-fuer-die-zukunft-100.html ab Minute 22:38.

### Literatur

Barzel, B. / Ebers, P. (2020): Kognitiv aktivieren - Eine wichtige Dimension fürs fachliche Lernen – In: mathematik lehren 223, S. 27 – 31.

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe – Klett, Stuttgart.

Gallin, P. /Ruf, U. (1990): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz – Seelze, Kallmeyer.

Henningsen, M. /Stein, M. K. (1997): Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning – In: Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), S. 524 – 549.

Lengnink, K. (2009): Vorstellungen bilden: Zwischen Lebenswelt und Mathematik – In: Leuders, T./Hefendehl-Hebeker, L./Weigand, H.-G. (Hrsg.): Mathemagische Momente – Cornelsen, Berlin, S. 120 – 129.

Loibl, K./Roll, I./Rummel, N. (2017): Towards a theory of when and how problem solving followed by instruction supports learning – In: Educational Psychology Review, 29(4), S. 693 – 715.

Prediger, S./Barzel, B./Leuders, T./ Hußmann, S. (2011): Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen – In: mathematik lehren 164, S. 2 – 9.

Selter, C. (1993): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe – Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

Swan, M. (2007): The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study – In: Journal of Mathematics Teacher Education, 10(4-6), S. 217 – 237.

### D Differenzierung auf den Punkt gebracht

**Aspekte der Heterogenität:**

- individuelle Zugänge beim Umgang mit Daten und Größen

**Methode:**

- Gruppenarbeit

**Praxistipp:**

Die Offenheit der Erarbeitungsaufgabe ermöglicht im Sinne einer selbstdifferenzierenden Aufgabe verschiedene Zugangsweisen und Lösungsideen. Es ist wichtig, Raum und Zeit für kreative Ideen zu gewähren, dabei so zu moderieren, dass die kognitive Aktiverung erhalten bleibt.

FLORIAN SCHACHT, FLORIAN BASTKOWSKI, PAUL TYRICHTER

# „Eigentlich wie eine Welle!“

## Differenzierende Wege zur Sinusfunktion

**LERNGRUPPE:** 8.–13. Schuljahr

**IDEE:** Beim voraussetzungsreichen Thema der Sinusfunktion werden Verstehensgrundlagen der Trigonometrie sowie linearer und periodischer Funktionen gezielt aufgegriffen und es wird darüber explizit gesprochen

**PRINZIPIEN:** Lernendenorientierung & Adaptivität, Kommunikationsförderung

**VORWISSEN:** lineare und quadratische Funktionen, geometrische Beziehungen

**ARBEITSBLATT:** Erarbeiten der Sinusfunktion

**WEITERES MATERIAL:** Impulsfragen und Verlaufsplan dynamische Visualisierung

**ZEITBEDARF:** 2 Unterrichtsstunden (90 min plus Übungszeit)

Die Sinusfunktion ist eine bedeutsame mathematische Funktion, mit der sich periodische Vorgänge der Natur beschreiben lassen und die in der mathematischen und physikalischen Praxis eine wichtige Rolle spielt. Für den Mathematikunterricht ist die Sinusfunktion ein lohnenswerter, allerdings auch sehr komplexer Lerngegenstand (Hefendehl-Hebeker, 2002).

Die *Sinusfunktion* – schon der Begriff verknüpft ein geometrisches Konzept (den Sinus) mit einem funktionalen Zusammenhang. Für Lernende ergeben sich hier häufig Herausforderungen: Periodische Vorgänge thematisieren sie im Zusammenhang mit der Sinusfunktion zum ersten Mal im Mathematikunterricht, hierzu müssen dann sowohl trigonometrische als auch funktionale Verstehensgrundlagen herangezogen werden, um die trigonometrischen Beziehungen im Kontext funktionaler Veränderungsprozesse zu deuten (**Abb.1**).

### Den Unterricht planen

#### Annäherungen Lernender an die Sinusfunktion beobachten

Im folgenden Ausschnitt diskutieren die Schülerinnen Lea und Mira über die Riesenrad-Aufgabe in **Abb.2**. Bei der Aufgabe soll unter anderem der Graph der Zeit-Höhe-Funktion hergeleitet und gezeichnet werden.

**Lea:** Ist das jetzt so ein Graph [*deutet mit dem Bleistift eine proportionale Funktion an*] oder ein Halbkreis?
**Mira:** Eigentlich muss es ja eine Parabel sein.
**Lea:** Eigentlich muss es ja so eine Welle sein [*zeigt mit dem Stift annähernd den Verlauf der Sinusfunktion*].
**Mira:** Es geht erst nach oben, dann ist es oben, dann nach ganz unten zum Boden und dann wieder nach oben.
**Lea:** Wir hatten aber noch nie zwei Bögen!
**Mira:** Wenn die Gondel weiterfahren würde, wäre sie sogar noch mehrmals rauf und runter mit mehr Bögen.
**Lea:** Es wiederholt sich immer hoch und runter.
**Mira:** Es würde immer weiter so gehen [*deutet mit der Hand einen Wellenverlauf an*].

Diese kurze Sequenz verdeutlicht das komplexe begriffliche Gefüge, in dem sich Lernende den neuen periodischen Vorgängen annähern. Wie viele Jugendliche nehmen sie zunächst an, dass der Zusammenhang linear ist. Dieses Phänomen wird als *Illusion of Linearity* bezeichnet (De Bock u. a. 2007). Lea fragt direkt zu Beginn der Sequenz, ob es sich um einen Graphen handelt (damit meint sie einen linearen Zusammenhang) oder um einen Halbkreis – Letzteres verstanden als Objekt einer geometrischen Domäne, der für sie kaum mit Funktionen verknüpft ist. Außerdem verdeutlicht das Transkript das Zusammenspiel von dynamischer Betrachtung (Grundvorstellung der Kovariation) und statischer Betrachtung (Grundvorstellung der Zuordnung).

Sehr wohl bekannt ist ihnen hingegen der Umgang mit quadratischen Funktionen, daher wirft Mira ein, dass die Form des entstehenden Funktionsgraphen die einer Parabel sei. Lea entwickelt den Gedanken mit Blick auf den periodischen Vorgang weiter und merkt an, dass es sich aufgrund der Drehung des Riesenrads um eine Welle handeln müsste. Solche periodischen Betrachtungen im Mathematikunterricht sind den Lernenden in der Regel neu – und Lea merkt an, dass sie bei einer Funktion *„aber noch nie zwei Bögen“* gesehen habe – was Mira mit Blick auf den Kontext plausibel herleiten und sogar fortsetzen kann: *„Wenn die Gondel weiterfahren würde, wäre sie sogar noch mehrmals rauf und runter mit mehr Bögen."*

Dieser kurze Ausschnitt zeigt ein typisches Zusammenspiel von Faktoren, die bedeutsam für den Lernprozess sind:

**Verstehensgrundlagen**
Die Lernenden knüpfen in der obigen Szene an ihr Alltagswissen, ihr Vorwissen zu linearen und quadratischen Funktionen sowie zu geometrischen Beziehungen an und müssen diese mit den Anforderungen des neuen Kontextes in Beziehung setzen. Doch welche Verstehensgrundlagen sind für das Erlernen der Sinusfunktion besonders wichtig und sollten – entweder bei leistungsschwächeren oder gerade bei leistungsstärkeren Lernenden – noch einmal bewusst thematisiert werden?

**Sprache**
Die beiden Lernenden kommunizieren sehr erfolgreich und entwickeln ihre Ideen gemeinsam weiter. Andere brauchen dafür mehr Unterstützung. Mit selbst gewählten Begriffen drücken Lea und Mira jeweils – in verdichteter und durchaus kreativer Form – spezifische begriffliche Zusammenhänge aus. *„So ein Graph"* [*begleitet mit Geste der Geradlinigkeit*] meint bei ihnen eine proportionale Funktion, *Halbkreis* bezieht sich auf den Verlauf der Gondel, *Parabel* knüpft an bekannte Funktionen an und *Welle* deutet die Periodizität des betrachteten Vorgangs an. Wie geht man im Unterricht mit solchen Begriffen um, die die Lernenden nutzen und die für das Verstehen des neuen Zusammenhangs von großer Bedeutung sind?

Dieser Beitrag zeigt, auf welche Verstehensgrundlagen die Lernenden aufbauen (müssen), um sich die Sinusfunktion zu erschließen, und welche Rolle gerade die Sprache dabei spielt. So werden einerseits Möglichkeiten bereitgestellt, die *Kommunikation* zu fördern, andererseits *adaptiv* an die jeweiligen individuellen Lernvoraussetzungen anzuknüpfen.

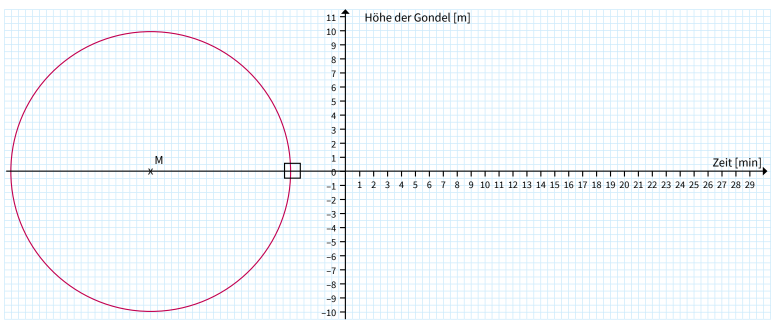
| Lernstufen im Lernpfad | Beispiel |
| --- | --- |
| **L5:** Besondere Eigenschaften des Graphen der Sinusfunktion werden beschrieben | *„Alle 12 min wird die x-Achse geschnitten. Dort sind auch die steilsten Stellen. Der Verlauf wiederholt sich nach einem Umlauf immer wieder. Die x-Achse kann die Einheit Grad oder Minuten haben."* |
| **L4:** Der Graph wird gezeichnet | *„Verschiedene Zuordnungswerte der Gondel ergeben im Koordinatensystem einige Funktionswerte der Sinusfunktion. Die einzelnen Punkte werden zum Graphen verbunden."* |
| **L3:** Der Zuordnungsaspekt Zeit → Höhe wird expliziert | *„45° entsprechen 3 min. Daher befindet sich die Gondel nach 3 min auf einer Höhe von etwa 7 m über dem Fahrstuhl."* |
| **L2:** Der Zuordnungsaspekt Zeit → Winkel wird expliziert | *„Nach 3 min hat sich die Gondel um 45° gedreht. Der Zusammenhang zwischen Zeit und Drehwinkel ist proportional."* |
| **L1:** Zuordnungsaspekte der Sinusfunktion am Kreis werden erkundet und beschrieben | *„Nach dem Einsteigen fährt die Gondel nach oben. Der Zeit wird die Höhe der Gondel zugeordnet. Nach 6 min ist die Gondel am höchsten Punkt."* |

**Abb. 1**: Lernpfad zur Thematisierung der Sinusfunktion

### Vom Riesenrad zur Sinusfunktion

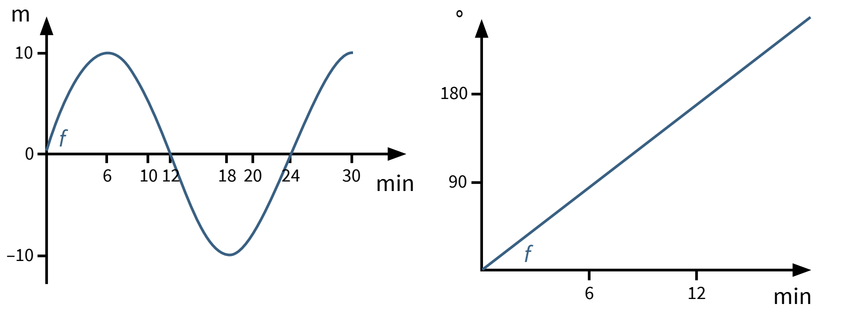
**Situation:**
Das Riesenrad dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn mit einer konstanten Geschwindigkeit. Man kann während der Fahrt in die Gondeln steigen und diese verlassen, ohne dass die Gondel dabei hält. Das Riesenrad benötigt für eine vollständige Umdrehung 24 Minuten.
Zum Zeitpunkt 0 Min. steigt man in die eingezeichnete Gondel ein.

**Frage:**
Wie hoch ist die Gondel nach x Minuten? Zeichne diese Zuordnung in das Koordinatensystem.




→ *Tipp*: Markiere im Riesenrad verschiedene Stellen für die Gondel. Zu welchem Zeitpunkt befindet sich die Gondel dort jeweils? Wie hoch ist sie?

**Abb. 2**: Riesenrad-Aufgabe zur Erarbeitung periodischer Vorgänge (vgl. Hußmann u. a., 2017)




$f(x) = 10 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{12}\right)$
Graph der *Zeit-Höhe-Funktion*

$f(x) = 15x$
Graph der *Zeit-Winkel-Funktion*

**Abb. 3**: Periodischer (links) und proportionaler (rechts) funktionaler Zusammenhang im Kontext der Riesenrad-Aufgabe

## Lernziele entlang des Lernpfads setzen

**Unterschiedliche funktionale Zusammenhänge verknüpfen**

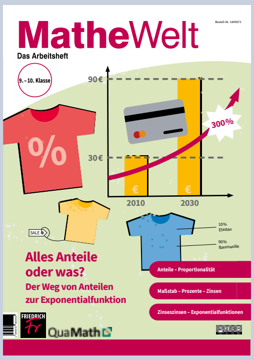
Der in **Abb. 1** dargestellte exemplarische Lernpfad greift eine unterrichtliche Thematisierung im Sinne von fünf aufeinander aufbauenden Lernstufen auf. Auf der grundlegenden Lernstufe L1 geht es zunächst darum, die Sinusfunktion unter dem besonderen Fokus des Zuordnungsaspektes zu erkunden. Auf der Grundlage einer Auseinandersetzung mit dem proportionalen Zuordnungsaspekt Zeit → Winkel (L2) und der Zuordnung Zeit → Höhe (L3) kann der grobe Verlauf erschlossen und anschließend exakt gezeichnet werden (L4). Auf dieser Basis kann dann die Beschreibung der besonderen Eigenschaften vorgenommen werden (L5).

Die Aufgabe in **Abb. 2** adressiert mit der Gondelfahrt einen periodischen Zusammenhang, den sich die Lernenden im Rahmen der Unterrichtssequenz erschließen. In einem ersten Schritt soll dazu in einem Koordinatensystem eingezeichnet werden, auf welcher Höhe sich die betrachtete Gondel jeweils zum Zeitpunkt $t$ befindet (Zeit-Höhe-Funktion). Wichtig ist hierbei, dass die $x$-Achse als Horizontlinie gedeutet wird – das heißt, die negativen $y$-Werte stellen die orientierte Höhe der Gondel in Abhängigkeit von der Einstiegshöhe dar. Der periodische funktionale Zusammenhang führt aus mathematischer Sicht direkt zur Sinusfunktion (**Abb. 3** links).

Im Erarbeitungsprozess selbst spielt noch ein zweiter funktionaler Zusammenhang eine wichtige Rolle. In der Regel betrachten die Lernenden zunächst markante Punkte, an denen sich die Gondel befindet: zu Beginn der Fahrt auf Höhe *0 m*, nach einer Vierteldrehung (entspricht 90°) und *6 min* auf Höhe *10 m*, nach einer halben Drehung (entspricht 180°) und *12 min* auf Höhe *0 m*, nach einer Dreivierteldrehung (entspricht 270°) und *18 min* auf Höhe *–10 m* usw. Im weiteren Verlauf können die betrachteten Zeitpunkte dann zunehmend verfeinert werden.

Im Unterricht wird dieser funktionale Zusammenhang häufig nicht explizit angesprochen, wenngleich er

## MatheWelt: Alles Anteile oder was?




**Der Weg von Anteilen zur Exponentialfunktion**

*Lerngruppe: 9. – 10. Schuljahr*

Gegen Ende der Mittelstufe zeigt unsere Rückschau auf die Zusammenhänge verschiedener Themengebiete über die Schuljahre hinweg den Lernfortschritt und die roten Fäden.
Die Lernenden erkennen dabei die gemeinsame Kernidee: *„Mit einem Faktor kann man Dinge vergrößern bzw. verkleinern.“* Diese ist für das Verständnis von mehrjähriger Verzinsung (Zinsenszins) oder von Exponentialfunktionen grundlegend, da hier die Veränderung mehrfach hintereinander ausgeführt wird.
Der sukzessive Aufbau einer durchgängig genutzten Visualisierung zunächst als Anteils- bzw. Bruchstreifen, später als Prozentstreifen und dann die Betrachtung wachsender Säulen bei der Exponentialfunktion soll Kohärenz stiften und verstehendes Lernen ermöglichen.
Die Aufgaben in dieser MatheWelt vertiefen noch einmal die einzelnen Themenfelder, die hier zusammenkommen, und fördern damit den Blick für die Zusammenhänge.
Zunächst können die Lernenden anhand einer komplexeren Aufgabe aus Klasse 9/10 ihr Wissen einschätzen, und dann aus einem Aufgabenpool für sie passende bearbeiten. Diese thematisieren verschiedene Inhalte vergangener Schuljahren und tragen so zur Kompensation von Wissenslücken bei. Wichtig ist, individuelle Lernziele zu setzen; das geschieht im Selbst-Check durch die Aufgaben A-E. Dann gilt es, die Lernenden basierend auf den Ergebnissen des Selbst-Checks adaptiv bei ihren Lernprozessen zu unterstützen und zu fördern.
Die MatheWelt bietet Material, das sich an den Prinzipien der Verstehensorientierung, Durchgängigkeit und auch kognitiven Aktivierung orientiert und dabei die Planungsaufgabe Lernziele setzen und Lernpfade konzipieren konkretisiert.

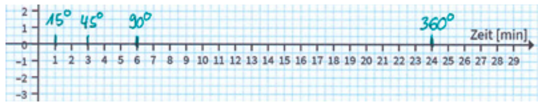
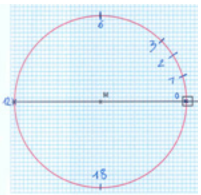
Viel Erfolg beim Einsatz im Unterricht!
*Birte Pöhler, Lars Holzäpfel*

für das Verstehen und den Begriffsbildungsprozess von besonderer Bedeutung ist: Betrachtet wird oft zunächst die *Zeit-Winkel-Funktion*, die die Drehung angibt, die die Gondel zum entsprechenden Zeitpunkt zurückgelegt hat. Im Unterschied zur *Zeit-Höhe-Funktion* ist die *Zeit-Winkel-Funktion* proportional, das heißt, der Winkel ändert sich proportional zur Zeit (s. **Abb. 3** rechts).

Im Umgang mit funktionalen Zusammenhängen ist die entscheidende Verstehensgrundlage, zunächst die zwei Größen zu explizieren (vgl. Lernstufen L2 und L3 in **Abb. 1**), die zueinander in Beziehung gesetzt werden (Zindel u. a. 2018). Ohne eine Klärung der zwei beteiligten Größen wird die Sinusfunktion nicht zu erarbeiten sein. Gibt es Lernende, die sich mit der Festlegung der zwei Größen als Verstehensgrundlage noch schwertun, so sollte man diese gezielt mit ihnen thematisieren. Dabei müssen zuerst die beiden voneinander abhängigen Größen identifiziert werden. Danach könnten einige zugehörige Werte in einer Tabelle aufgelistet werden. Zur Vertiefung könnten anschließend noch weiteren Darstellungsformen thematisiert werden.

**Tab. 1** verdeutlicht bespielhaft Varianten, die *Zeit-Winkel-Funktion* im Unterricht zu thematisieren. Dabei ist es hilfreich, die unterschiedlichen Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge miteinander in Beziehung zu setzen.

Die – exemplarische – Diskussion der Bedeutung der Größen und Darstellungsformen des proportionalen Zusammenhangs als Verstehensgrundlage für die Erarbeitung der Sinusfunktion wirft nun die Frage auf, welche Verstehensgrundlagen Lernende darüber hinaus im Kontext der Betrachtung periodischer Vorgänge im Mathematikunterricht benötigen bzw. worauf sie zurückgreifen (können). **Abb. 4** zeigt einige wichtige Grundlagen entlang der beiden Leitideen Raum und Form sowie Strukturen und funktionaler Zusammenhang (vgl. KMK, 2022) im Sinne der Durchgängigkeit. Die entsprechenden Leitideen und Inhalte sind als langfristig angelegte Lernpfade über die Unterrichtsreihen hinweg eng miteinander vernetzt.

<table>
<tr><td>Wertetabelle</td><td><table><tr><td>Zeit in min</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>24</td></tr><tr><td>Winkel in °</td><td>0</td><td>45</td><td>90</td><td>135</td><td>180</td><td>360</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Alternative oder simultane Achsenbeschriftung</td><td>Die Abszisse des Koordinatensystems kann sowohl in Minuten als auch Grad (oder simultan in beidem) beschriftet werden. So wird ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Drehwinkel erkennbar.<br></td></tr>
<tr><td>Im Kreis Zeiten und Winkel markieren</td><td>Entsprechend der Position der Gondel auf dem Kreis können an ausgewählten Stellen die vergangenen Minuten notiert werden. So wird ein proportionaler Zusammenhang deutlich.<br></td></tr>
<tr><td>Funktionsgleichung explizit angeben</td><td>Anhand der Wertetabelle kann die Gleichung $y = 15 \cdot x$ hergeleitet werden, wobei x die vergangenen Minuten und y den Drehwinkel in Grad darstellen.</td></tr>
<tr><td>Funktionsgraphen zeichnen</td><td>Mithilfe der Wertetabelle oder der Funktionsgleichung kann der proportionale Zusammenhang gemäß Abb. 3 rechts visualisiert werden.</td></tr>
</table>

**Tab. 1**: Möglichkeiten der Problematisierung des proportionalen Zusammenhangs zwischen Zeit und Winkel als Verstehensgrundlage im Kontext der Sinusfunktion unter besonderer Berücksichtigung vielfältiger Darstellungen

Geometrisch wird der Sinus als das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck definiert. Darauf aufbauend findet die Trigonometrie wieder Verwendung bei der Bestimmung des Winkels zwischen Vektoren, der Berechnung von Längen in Dreiecken oder Flächeninhalten in Parallelogrammen sowie bei der Beschreibung von besonderen Kurven im Dreidimensionalen (z. B. Helix).

Auf der anderen Seite kann der Sinus auch funktional betrachtet werden (vgl. etwa Wittmann 1987, Leuders/Prediger, 2005). Dabei müssen die Trigonometrie im Dreieck und die Sinusfunktion nicht zwingend gleich zu Beginn im Unterricht verknüpft werden. Mit qualitativen Betrachtungen können Lernende auch ohne Vorkenntnisse über trigonometrische Beziehungen im Dreieck den Verlauf des Graphen der Sinusfunktion zeichnen.

Die in Klasse 6/7 thematisierten Zuordnungen zweier Größen werden hier noch einmal für einen Verstehensprozess explizit thematisiert. Die Abgrenzung des proportionalen Zusammenhangs von Zeit (in *min*) und Position der Gondel im Rad (in °) zu dem periodischen Zusammenhang von Zeit (in *min*) und Höhe (in *m*) ist für viele ein relevantes Lernziel.

Die Kovariation zwischen der vergangenen Zeit (in *min*) und der

D

## Differenzierung auf den Punkt gebracht

### Aspekte der Heterogenität:

- sprachliche Ausdrucksfähigkeit zwischen Alltags-, Bildungs- und Fachsprache

### Methode:

- Darstellungswechsel erläutern lassen, Plenumsgespräche

### Praxistipp:

Lassen Sie Elemente der Veränderung beschreiben, einzelne Stellen verändern, und Grundvorstellung der Funktion verbalisieren.

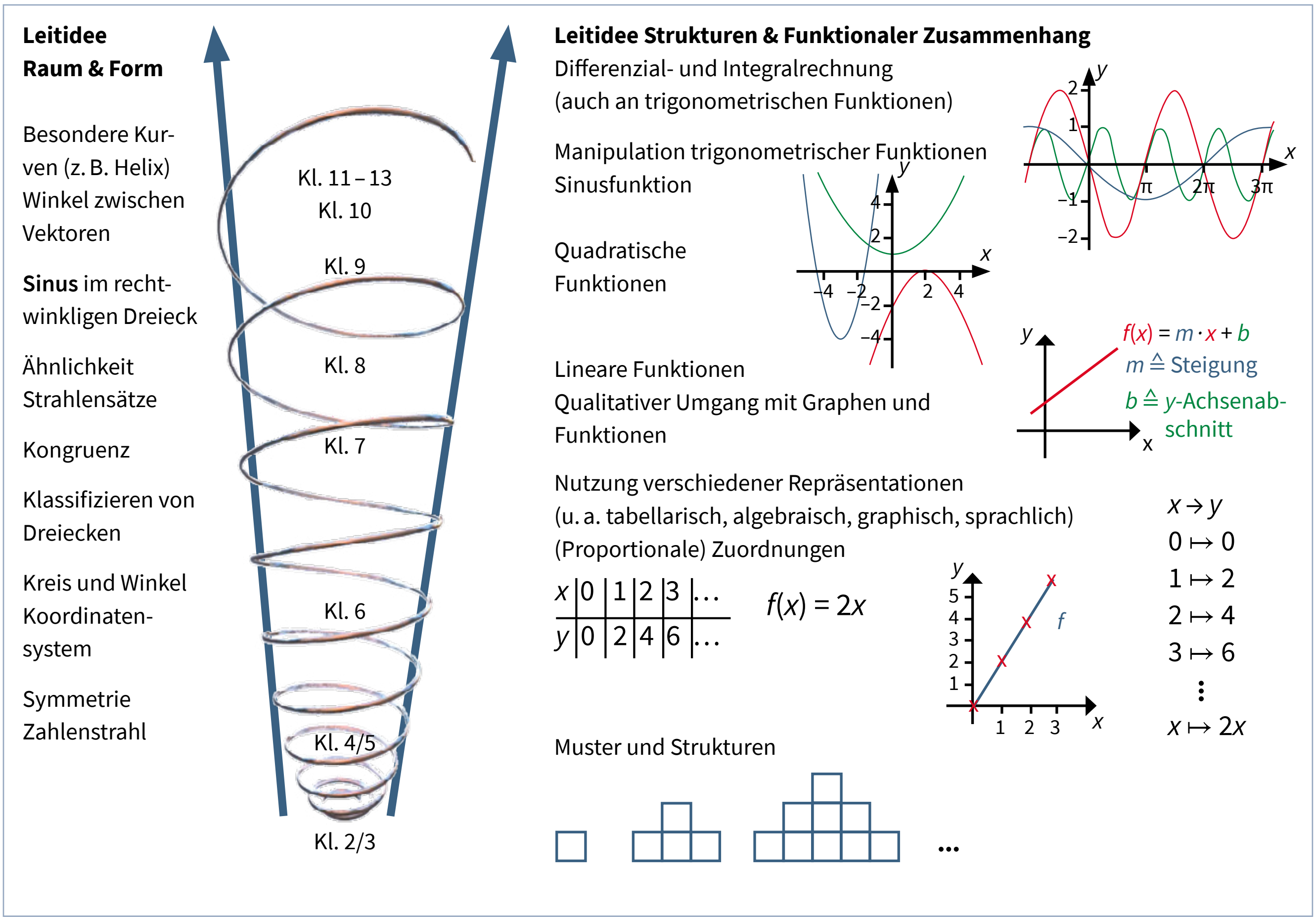



**Abb. 4**: Verstehensgrundlagen im Kontext der Sinusfunktion

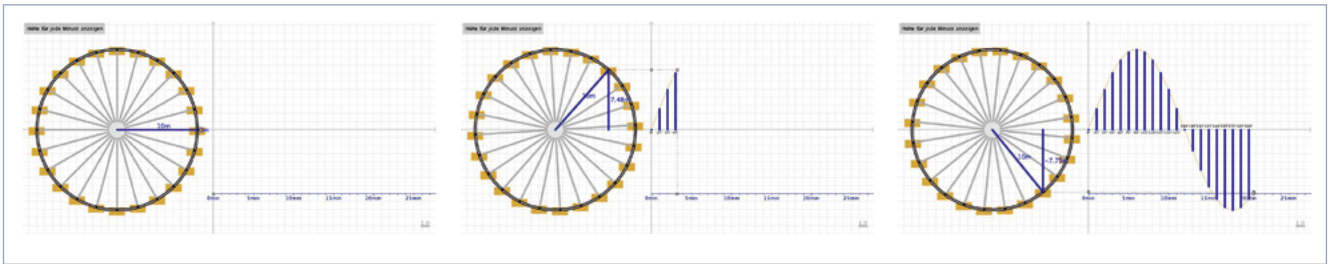


**Abb. 5**: Sequenz einer dynamischen Visualisierung

Gondelposition im Riesenrad (in °) kann *tabellarisch*, in Form einer *Gleichung*, im Rahmen eines *Graphen* im Koordinatensystem, unmittelbar *im Kreis* oder sogar gemeinsam auf der *Abszisse* des Koordinatensystems dargestellt werden (s. **Tab. 1**). Um adaptiv mit heterogenen Verstehensgrundlagen der Lernenden umzugehen, wird die Aufgabe zunächst offen differenzierend gestellt, sodass einige Lernende sie ohne weitere Unterstützung bewältigen können. Andere erhalten je nach Verstehensprozess adaptiv weitere Unterstützung durch vielfältige Darstellungen.

## Digitale Werkzeuge auswählen für differenzierende Zugänge

Mithilfe einer dynamischen Visualisierung kann die Aufgabe im zeitlichen Ablauf, interaktiv oder als kleiner Film, anschaulich dargestellt werden (s. **Abb. 5**). Eine dynamische Geometriesoftware (DGS) lässt sich, je nach Fokussetzung, in allen Stufen des Lernpfads (s. **Abb. 1**) sinnvoll einsetzen.

Für den Einsatz einer DGS sind vor allem zwei Varianten denkbar. Die Übertragung der Höhen im Einheitskreis in ein Koordinatensystem (vgl. Lernstufe L4 in **Abb. 1**) gelingt leistungsstärkeren Lernenden, wie in unserem Beispiel Mira und Lea, selbstständig. Dynamische Visualisierungen könnten für Mira und Lea zur Vertiefung des Verständnisses des funktionalen Zusammenhangs zwischen der Zeit und der Höhe im Kreis verwendet werden, sodass die Visualisierung im Anschluss an eine intensive Auseinandersetzung mit der Thematik erfolgt, um bisherige Gedanken noch einmal zu reflektieren und zu ordnen.

Alternativ könnte eine DGS aber auch für leistungsschwächere Lernende zum Einstieg als „Black Box“

verwendet werden, um erste Erkenntnisse über den funktionalen Zusammenhang zwischen der Zeit und der Höhe im Kreis zu sammeln (vgl. Lernstufe L1 in **Abb. 1**) und Verstehensschritte vorzuentlasten. In dem Zusammenhang ist es für die zugrunde liegenden Verstehensprozesse und zur Differenzierung besonders wichtig, dass man die Größen abmisst und überträgt, zum Beispiel an der Tafel oder auf Papier.

### Sprache und Lernprozesse unterstützen und fördern

So wie hier für das Beispiel der dynamischen Visualisierung vorgestellt, können die Lernprozesse von schwächeren Lernenden oft durch stärkere Vorstrukturierung der Aufgaben unterstützt werden. Dabei sollte allerdings das *Unterstützen* nicht nur zur richtig gelösten Aufgabe führen („Haben alle das Richtige im Heft stehen?“). Stattdessen dient es auch der Förderung der Lernprozesse („Haben möglichst alle nun das Richtige im Kopf“?). Eine solche Förderung wird immer auch einzelne Lernende gezielt unterstützen, aber ihnen dabei das Denken nicht abnehmen.

Der Unterschied zwischen *Unterstützen* (mit kurzfristigem Ziel der Aufgabenbewältigung) und *Fördern* (mit Ziel des langfristigen Lernfortschritts) zeigt sich auch am Beispiel der sprachlichen Lernvoraussetzungen und Lernziele: Nicht alle Lernenden können ihre Gedanken so klar artikulieren wie Lea und Mira, die zwar noch nicht überall die formalbezogenen Fachbegriffe wie Hochpunkt, Tiefpunkt und Periode kennen, aber eine eigene bedeutungsbezogene Denksprache heranziehen, um ihre intuitiven Ideen zu kommunizieren (vgl. Lernstufe L1 in **Abb. 1**).

Welche Denksprache relevant sein könnte, wird in **Abb. 6** angedeutet. Eine reine Unterstützung der Denksprache für sprachlich schwächere Lernende könnte durch Formulierungshilfen angeboten werden, doch ist stets die Gefahr, dass Lernende die Satzbausteine kurzfristig übernehmen, ohne sie langfristig in ihren Wortschatz aufzunehmen (Prediger 2020).

Eine Förderung der Denksprache braucht daher aktivere Aneignungs-

| Zeit-Winkel-Funktion | Zeit-Höhe-Funktion |
|---|---|
| | es sieht so aus [Gesten] |
| Position der Gondel | wie eine Welle |
| nach 6 Minuten ist die Gondel … | höchster Punkt |
| Grad und Minuten | Spiegelachse |
| ganz unten sind 18 min. | Welle |
| bei 0° sind 0 min. | Bogen |
| Zeit | Halbkreis |
| konstant | Umdrehung |
| proportional | immer so weiter |
| Winkel | wiederholen |
| Viertelkreis | Steigung |
| Zusammenhang | unendlich weiter |
| Halbkreis | Parabel |
| Achtelkreis | mehrere Bögen |
| Zuordnung | tiefster Punkt |
| | Zick-Zack Funktion |
| | Periodizität |
| | periodisch |

**Abb. 6**: Typische Satzbausteine auf dem Weg zur Sinusfunktion

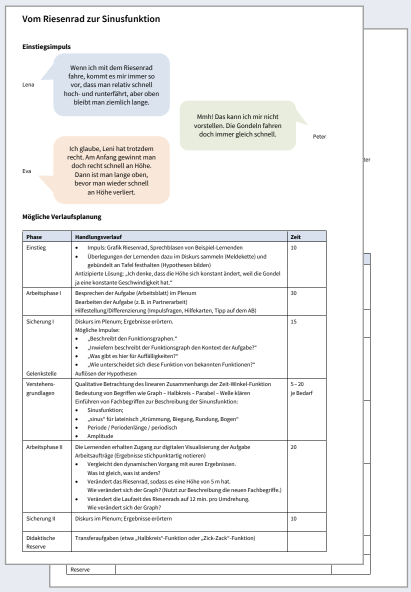
prozesse mit Verknüpfung zur eigenen Sprache. Lehrkräfte, die die Lernprozesse der Lernenden aufmerksam beobachten, können etwa Satzbausteine mitschreiben (**Abb. 6**), die sie dann für alle in der Klasse thematisieren können: *„Lea hat vorhin etwas Interessantes gesagt, sie hat zwischen ‚**so** einem Graph‘* [begleitet mit Geste der Linearität] *und ‚Halbkreis‘ unterschieden, was meinte Lea damit?“*. So könnten andere Lernende antworten: „Der Graph ist nicht gerade, sondern krumm“, „also Parabel“. Beide Ausdrucksweisen würden dann in einem Klassen-Sprachspeicher gesammelt.

So könnte der Wortschatz der Lernenden gefördert, also sukzessive aufgebaut werden, ausgehend von den mitgebrachten Satzbausteinen über eine gemeinsame Denksprache hin zu den formalen Sprachmitteln.

### Plenumsgespräche gestalten

Gerade in Plenumsgesprächen kommt es darauf an, etwa zugrunde liegende Vorstellungen in den Beiträgen der Lernenden explizit zu machen und gezielt zu thematisieren. Dies ist insbesondere dann besonders wichtig, wenn fehlerhafte Vorstellungen geäußert werden, z. B. dass der Graph der periodischen Funktion sich aus der Aneinanderreihung von Halbkreisen ergibt. Solche Beiträge bieten ein hohes Potenzial, das Begriffsnetz, in das die Sinusfunktion eingebettet ist, genauer aufzufalten. Der beispielhafte Unterrichtsentwurf in **Abb. 7** beschreibt unterschiedliche Gesprächsanlässe im Klassenverbund.

### Material zum Download:


Vom Riesenrad zur Sinusfunktion

Einstiegsimpuls



Mögliche Verlaufsplanung

| Phase | Handlungsverlauf | Zeit |
|---|---|---|
| Einstieg | • Impuls: Grafik Riesenrad, Sprechblasen von Beispiel-Lernenden<br>• Überlegungen der Lernenden dazu im Diskurs sammeln (Meldekette) und gebündelt an Tafel festhalten (Hypothesen bilden)<br>Antizipierte Lösung: „Ich denke, dass die Höhe sich konstant ändert, weil die Gondel ja eine konstante Geschwindigkeit hat.“ | 10 |
| Arbeitsphase I | Besprechen der Aufgabe (Arbeitsblatt) im Plenum<br>Bearbeiten der Aufgabe (z. B. in Partnerarbeit)<br>Hilfestellung/Differenzierung (Impulsfragen, Hilfekarten, Tipp auf dem AB) | 30 |
| Sicherung I<br><br>Gelenkstelle | Diskurs im Plenum; Ergebnisse erörtern.<br>Mögliche Impulse:<br>• „Beschreibt den Funktionsgraphen.“<br>• „Inwiefern beschreibt der Funktionsgraph den Kontext der Aufgabe?“<br>• „Was gibt es hier für Auffälligkeiten?“<br>• „Wie unterscheidet sich diese Funktion von bekannten Funktionen?“<br>Auflösen der Hypothesen | 15 |
| Verstehens-grundlagen | Qualitative Betrachtung des linearen Zusammenhangs der Zeit-Winkel-Funktion<br>Bedeutung von Begriffen wie Graph – Halbkreis – Parabel – Welle klären<br>Einführen von Fachbegriffen zur Beschreibung der Sinunsfunktion:<br>• Sinusfunktion;<br>• „sinus“ für lateinisch „Krümmung, Biegung, Rundung, Bogen“<br>• Periode / Periodenlänge / periodisch<br>• Amplitude | 5 – 20 je Bedarf |
| Arbeitsphase II | Die Lernenden erhalten Zugang zur digitalen Visualisierung der Aufgabe<br>Arbeitsaufträge (Ergebnisse stichpunktartig notieren)<br>• Vergleicht den dynamischen Vorgang mit euren Ergebnissen. Was ist gleich, was ist anders?<br>• Verändert das Riesenrad, sodass es eine Höhe von 5 m hat. Wie verändert sich der Graph? (Nutzt zur Beschreibung die neuen Fachbegriffe.)<br>• Verändert die Laufzeit des Riesenrads auf 12 min. pro Umdrehung. Wie verändert sich der Graph? | 20 |
| Sicherung II | Diskurs im Plenum; Ergebnisse erörtern | 10 |
| Didaktische Reserve | Transferaufgaben (etwa „Halbkreis“-Funktion oder „Zick-Zack“-Funktion) | |

**Abb. 7**: Beispielhafter Unterrichtsverlauf

Icon: © DZLM

Im Folgenden wird auf mögliche Moderationsansätze für die drei darin eingeplanten Unterrichtsgespräche eingegangen.

Das erste Plenumsgespräch findet während des Einstiegs statt. Die Lehrkraft erläutert die Aufgabe und moderiert die Gesprächssituation. Dabei wird die Aufgabensituation zunächst als Impuls gesetzt. Die Aufgabe der Lehrkraft besteht primär darin, die Aussagen und Ideen der Lernenden zu bündeln und beispielsweise als Hypothesen an der Tafel zu fixieren (s. **Abb. 8**). Diese Aussagen werden nach der Erarbeitungsphase erneut beleuchtet.

Das zweite Plenumsgespräch erfolgt in der ersten Systematisierungsphase. Die Lernenden präsentieren ihre Erkenntnisse aus der Erarbeitungsphase und erörtern diese in Gruppen. Hier sollte die Lehrkraft ggf. zwischenzeitlich moderierend eingreifen, um die wichtigsten Aspekte der Arbeitsphase in den Fokus des gemeinsamen Gesprächs zu rücken. Mögliche Impulse könnten sein:

- „Beschreibt bitte den Funktionsgraphen!“
- „Welche Auffälligkeiten (z. B. Symmetrie, Periodizität) sind zu beobachten?“
- „Wie unterscheidet sich diese Funktion von bereits bekannten Funktionen?“
- „Könnte man die $x$-Achse auch mit einer anderen Einheit beschriften?“
- „Wie genau kann man den Graphen im negativen $y$-Achsenbereich zeichnen?“

Ziel dieser Gesprächsführung ist es, die anfangs aufgestellten Hypothesen mit den Lernenden noch einmal zu erörtern und aufzulösen. In diese Phase gehört auch die oben bereits beschriebene Moderation, die Sprachmittel der Lernenden mit den zu lernenden Sprachmitteln verknüpft.

Das dritte Plenumsgespräch findet nach der zweiten Arbeitsphase, der Auseinandersetzung mit dem digitalen Werkzeug, statt. Die Lernenden haben nun idealerweise die vorherigen Erkenntnisse vertieft, neue Fachbegriffe zur Beschreibung der funktionalen Zusammenhänge genutzt

„Dass man im Riesenrad relativ lange oben bleibt, aber schnell wieder runterfährt, könnte etwas Psychisches sein, weil man etwa Angst vorm Runterfahren hat oder der Eindruck, den man oben hat, einem länger vorkommt.“

„Die Höhe ändert sich konstant, weil die Gondel ja eine konstante Geschwindigkeit hat.“

„Für die ersten 12 Minuten könnten wir eine Parabel einzeichnen.“

„Die zweite Runde des Riesenrads muss genauso aussehen wie die erste auch.“

**Abb. 8**: Sammlung an der Tafel: Antizipierte Hypothesen der Lernenden

und die Auswirkungen von Änderungen der grundlegenden Parameter erkannt. Die Lehrkraft moderiert die Gesprächssituation und gibt ggf. Impulse, um das Gespräch zu lenken, z. B.

- „Welchen Einfluss hat die Höhe des Riesenrads auf den Verlauf der Sinuskurve?“
- „Welche Einfluss hat die Laufzeit des Riesenrades auf die Sinuskurve?“
- „Wieso kann der Graph keinen Zick-Zack-Verlauf haben?“
- „Wieso verläuft der Graph nicht in Form eines Halbkreises?“

## Eine Illusion? Linearität als Verstehensgrundlage sehen

Mit der Illusion of Linearity wird das Phänomen bezeichnet, dass Lernende selbst dort lineare Zusammenhänge unterstellen, wo diese mathematisch nicht passend sind.

Schaut man allerdings genauer auf Verstehensgrundlagen, so macht das Beispiel der Sinusfunktion deutlich, wie vernetzt mathematische Begriffe sind. Der Kontext der Riesenrad-Aufgabe ist ein Beispiel für einen periodischen Zusammenhang, für den Linearität bzw. ein sicheres Gespür für proportionale Zusammenhänge durchaus wichtig ist. Die Zeit-Höhe-Funktion ist periodisch – aber die Zeit-Winkel-Funktion als Verstehensgrundlage ist eine proportionale Funktion (vgl. Lernstufe L2 und L3 in **Abb. 1**). Eine Illusion also? Linearität spielt auf einmal dort eine wichtige Rolle, wo man sie nicht vermuten mag: beim Verstehen der Sinusfunktion.

### Literatur


Bock, D. D./Dooren, W. V./Janssens, D./Verschaffel, L. (2007): The illusion of linearity. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71164-5

Hefendehl-Hebeker, L. (2002): Maße und Funktionen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. – In: Augsburger mathematisch-naturwissenschaftliche Schriften 41. Wißner.

Hußmann, S./Barzel, B./Leuders, T./Prediger, S. (2017): Mathewerkstatt. Mittlerer Schulabschluss. Allgemeine Ausgabe 10. Schuljahr. Cornelsen, Berlin.

KMK (Kultusministerkonferenz) (2022): Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) [Beschluss vom 23.06.2022].

Leuders, T./Prediger, S. (2005) (Hrsg.): Funktioniert's? Denken in Funktionen. Praxis der Mathematik in der Schule, 47(2).

Prediger, S. (2020): Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe – ein forschungsbasiertes Praxisbuch. Cornelsen, Berlin.

Wittmann, E. Ch. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken. Vieweg.

Zindel, C./Brauner, U./Jungel, C./Hoffmann, M. (2018): Um welche Größe geht's? Die Sprache funktionaler Zusammenhänge verstehen und nutzen. – In: mathematik lehren 206, Friedrich Verlag GmbH, S. 23 – 28.

**LARS HOLZÄPFEL, ANDREAS RIEU, FLORIAN SCHACHT, MAYA ZASTROW, BIANCA FINK**

# Vom Problemlösen zum Argumentieren

## Hinführen zu prozessbezogenen Kompetenzen

**LERNGRUPPE:** 5. – 13. Schuljahr

**IDEE:** Am Beispiel arithmetischer Basisfähigkeiten wird gezeigt, wie Lernende das Argumentieren und Kommunizieren über die Schuljahre hinweg lernen und dabei kognitiv aktiviert werden

**PRINZIPIEN:** Durchgängigkeit, Kognitive Aktivierung, Lernendenorientierung & Adaptivität


**VORKENNTNISSE:** Teilbarkeit/Teiler/Primzahlen

**ZEITBEDARF:** 2 Unterrichtsstunden (90 min)

*„Ich will gar nicht wissen, **warum** das so ist. Ich will nur wissen, **wie es geht**, damit ich es ausrechnen kann und das Ergebnis habe!“* Solche vertrauten Sätze aus dem Schulalltag machen deutlich, wie wenig Bedeutung die Lernenden dem *Verstehen* von Mathematik beimessen. Dabei kommt es gerade bei der Konzeption von kognitiv aktivierendem und kommunikationsförderndem Unterricht darauf an, den Aufbau eines vertieften Verständnisses von Mathematik zu fördern, sich mit dem „Warum“ auseinanderzusetzen und nach Gründen zu suchen, weshalb ein Verfahren, eine Regel oder eine Formel funktioniert bzw. angewendet werden kann – oder auch nicht (vgl. u. a. Reiss 2002, Brunner 2014).

So gibt es etwa bei der Aufgabe „Teiler der Zahl 10 000 finden“ (vgl. Holzäpfel u. a. 2018, S. 51) eine Reihe von Möglichkeiten, sich mit dem „Warum“ auseinanderzusetzen und Fragen zu stellen. (Wichtig ist natürlich, dass diese Aufgaben auch eine Reichhaltigkeit an Bearbeitungsmöglichkeiten anbieten.)

**Teiler der Zahl 10 000 finden**

a) Bestimme die Primfaktorzerlegung von 10 000.
b) Wie viele Teiler hat die Zahl 10 000?
c) Welche Zahl unter 10 000 hat die meisten Teiler?

Die reine Fokussierung auf das Ergebnis würde bei dieser Aufgabe gar nicht genügen, denn man wird hier zur argumentativen Absicherung regelrecht aufgefordert – sonst würde man in Aufgabenteil b) auch gar nicht sicher sagen können, ob man alle Teiler von 10 000 überhaupt gefunden hat.

Fachmathematisch basiert die Aufgabe auf dem Fundamentalsatz der Arithmetik, nach dem die Primfaktorzerlegung einer Zahl eindeutig ist. Dies muss im Unterricht nicht angesprochen werden, kann jedoch für bestimmte Klassen(-stufen) einen Denkmoment darstellen bei der Frage, ob durch die kombinatorische Darstellung der Primfaktoren auch tatsächlich alle Teiler abgebildet werden.

### Schrittweise Unterricht planen

#### Argumentationsqualitäten als Lernausgangslage diagnostizieren

Lernende finden in der Regel – meist in unsystematischer Weise – einige Teiler der Zahl 10 000 und geben sich dann recht schnell zufrieden mit der Aussage „Ich bin fertig, mehr finde ich nicht“ oder „Ich habe alle“.

Dies ist keine zufriedenstellende und dennoch typische Lösung. Hier müssen also Wege gefunden werden, wie die Lernenden darin unterstützt werden können, selbst Fragen zu stellen, eine kritische Haltung gegenüber (vorläufigen oder auch falschen) Ergebnissen zu entwickeln und ihre eigenen Aussagen stärker abzusichern. Dazu ist es zunächst erforderlich, sich ein Bild davon zu verschaffen, wo die Lernenden überhaupt stehen.

An solch einer Stelle zeigt sich sehr schnell die Heterogenität einer Lerngruppe – umso wichtiger ist es, verschiedene Ansatzpunkte zu identifizieren, an denen die Lernenden adaptiv unterstützt werden können (Friesen/Holzäpfel/Leuders 2022). Entsprechend müssen unterschiedliche Argumentationsqualitäten und damit verbunden unterschiedliche Ansprüche an die Starken und Schwachen formuliert werden (Bardy/Holzäpfel/Leuders 2021).

Die Aufgabe, alle Teiler der Zahl 10 000 zu finden, bietet einen großen Spielraum und ist auch insofern gut für den Einstieg in das Argumentieren geeignet, da sie inhaltlich nahezu voraussetzungsfrei ist und nur den Begriff des Teilers, also der Vorstellung der restfreien Division der Ausgangszahl, durch eine weitere natürliche

### 1 | Wissenswert: Typische Herausforderungen reichhaltiger Aufgaben

Welche typischen Hürden können bei der Aufgabe „Teiler der Zahl 10 000 finden“ zu Beginn beobachtet werden?

- *anzufangen fällt schwer:* Mit welchen Teilern sollte man beginnen?
- *unsystematisches Vorgehen:* keine paarweise Aufzählung der Teiler (kommt oft erst in einem späteren Schritt)
- *vergessen/übersehen einzelner Teiler:* nicht alle Teiler gefunden, zum Beispiel 1 (als trivialer Teiler) vergessen
- *fehlendes Begründungsbedürfnis:* Sind es wirklich alle? Warum?
- *Zusammenhang* zwischen den Teilaufgaben (a) und (b) *wird nicht erkannt* (Zusammenhang zwischen Primfaktorzerlegung und Anzahl der Teiler); nicht die Anzahl der Teiler wird betrachtet, sondern die Teiler selbst
- die Zahl 10 000 ist (zu) groß – eine Verkleinerung des Problems z. B. auf 100, um eine Idee für das Lösen zu entwickeln, wird nicht als Strategie erkannt
- *fehlende Ideen für eine grafische Darstellung* (z. B. schrittweises Zerlegen in Produkte in der Baumdarstellung) oder *systematische tabellarische Auflistung*
- *Rechenfehler* führen zu falschen Ergebnissen (und können Erkenntnisse behindern)

Zahl benötigt – was einen Einsatz in allen Klassenstufen jederzeit ermöglicht und einen Fokus auf das Argumentieren legt.

Wie die in **Kasten 1** beschriebenen typischen Hürden verdeutlichen, kommen vonseiten der Lernenden häufig kaum Argumentationsprozesse zustande. Wie dies unterstützt werden kann, wird nachfolgend diskutiert.

### Lernziele setzen: Argumentationsqualitäten bestimmen

Ziel des Unterrichts ist es, die Lernenden für das Begründen zu sensibilisieren. Von sich aus bringen sie nicht unbedingt ein Begründungsbedürfnis mit – dazu gibt es zunächst auch keinen Anlass. Wir möchten jedoch vermitteln, dass das Begründen (bzw. das Beweisen, welches sich durch eine gewisse formale Strenge vom Begründen abgrenzen lässt) die Mathematik als Disziplin ausmacht. Und dabei geht es nicht primär darum, andere zu überzeugen, sondern vor allem die mathematischen Gegenstände besser zu durchdringen, zu verstehen und entlang ihrer logischen Struktur zu ordnen, d. h. neue Zusammenhänge oder Sätze aus bekannten mathematischen Zusammenhängen herzuleiten.

**Argumentieren**
ist ein Begründungsprozess, bei dem verschiedene Gesprächsteilnehmende Argumente zu mathematischen Zusammenhängen austauschen und rechtfertigen, um gemeinsam Begründungen für mathematische Zusammenhänge zu entwickeln.

Insofern steht beim Argumentieren insbesondere die soziale Interaktion im Vordergrund (Meyer/Prediger 2009).

Ferner kann – wie in **Abb. 1** dargestellt – eine Abgrenzung zum Beweisen vorgenommen werden (s. dazu auch Brunner 2014).

#### Was macht eine gute Argumentation aus?

Um Argumente zu analysieren, hat der Philosoph Stephen Toulmin ein Argumentationsschema aus *Information*, *Schlussregel* mit *Stützung* und *Schlussfolgerung* entwickelt (Toulmin 1996, siehe auch Krummheuer 2003). Angewendet auf die Suche der Teiler von 10 000 wird dabei ausgehend von der Menge der Teiler von 100 (also der Teilermenge der Zahl 100) darauf geschlossen, dass diese Teilmenge (der Zahl 100), als Teilmenge in der Teilermenge von 10 000 enthalten ist (vgl. **Abb. 2**).

Diese Erkenntnis wird durch Regeln und Sätze aus der Mathematik gestützt – hier zu Teilmengen und Teilermengen. Auch wenn das Toulmin-Schema zwei Begründungsstufen vorsieht – nämlich Schlussregel („weil“) und Stützung („aufgrund“), ist für den Unterricht eine dieser beiden Stufen bzw. eine Zusammenfassung völlig ausreichend.

Solche zusammenhängenden Überlegungen und Gedankenschritte gilt es herauszuarbeiten und den Lernenden bewusst zu machen, dass und wie Aussagen oder Beobachtungen zusammenhängen und begründet werden können. Ein Beispiel: „Wenn ich einen Teiler gefunden habe, muss es dazu noch einen zweiten Teiler geben, weil ich ja die zweite Zahl finden muss, mit der man multipliziert, um 10 000 zu erhalten. Das heißt, wenn ich die 10 000 durch 5 teile, erhalte ich die 2 000. Und die ist dann auch ein Teiler“ (vgl. **Abb. 3**).

| Argumentieren | Beweisen |
|---|---|
| • Diskursivität (Kommunizieren)<br>• Nutzen eigensprachlicher Mittel<br>• Argumentieren durch Plausibilität<br>• möglichst hohe Zugänglichkeit<br>• charakteristisch: großer Bedeutungsspielraum | • formale Sprache<br>• hohe Akzeptanz innerhalb der Fachdisziplin<br>• Nutzen mathematischer Sprache und Symbole |

**Abb. 1**: Abgrenzung der Begriffe Argumentieren und Beweisen.

Dieser Gedankengang wäre ein Beispiel für eine Argumentation, die auf den Teilerbegriff und dessen Definition zurückgreift. Allerdings wird hier deutlich, dass die Ansprüche natürlich auch entsprechend der Heterogenität der Lernenden bzw. der Klassenstufen skaliert werden müssen.

Beim Bestimmen der Primfaktorzerlegung bedarf es einer eher einfachen Überlegung, wohingegen die Absicherung dafür, dass in Teilaufgabe b) alle Teiler gefunden wurden bzw. in Teilaufgabe c) diejenige Zahl kleiner 10 000 mit den meisten Teilern ermittelt wurde, deutlich anspruchsvoller ist: Während z. B. wie oben bereits beschrieben für die Schwächeren die Argumentation für einen Komplementärteiler als ein Lernziel angesetzt werden kann, wäre das (in der gleichen Klasse) für die Starken sicherlich zu wenig herausfordernd – hier sollte man in jedem Fall die Argumentation für das *Finden aller Teiler* als Lernziel anvisieren (z. B. über die Kombination der Primfaktoren).

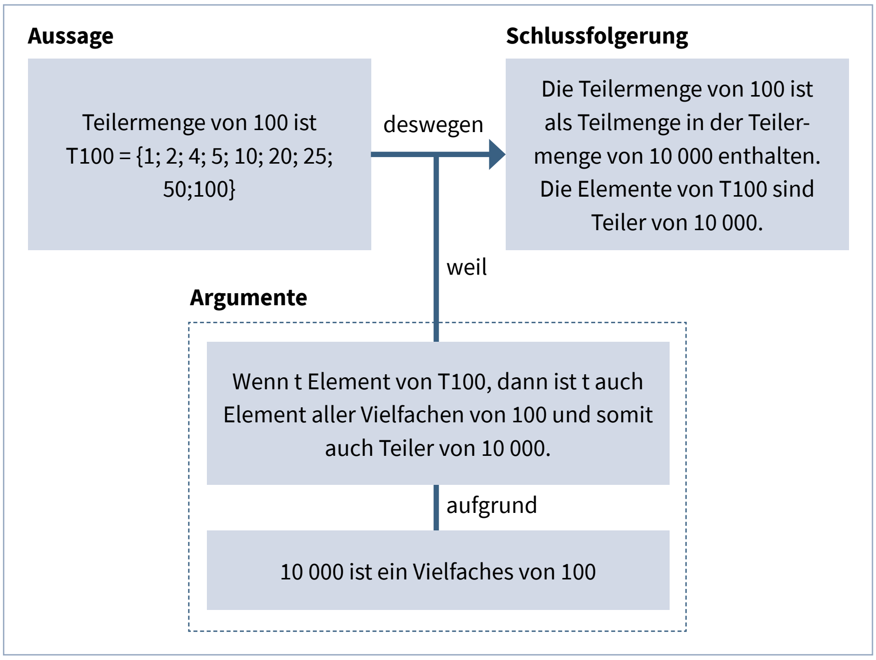



**Abb. 2**: Argumentationsschema nach Toulmin am Beispiel der Teileraufgabe (zwei Begründungs-Stufen)

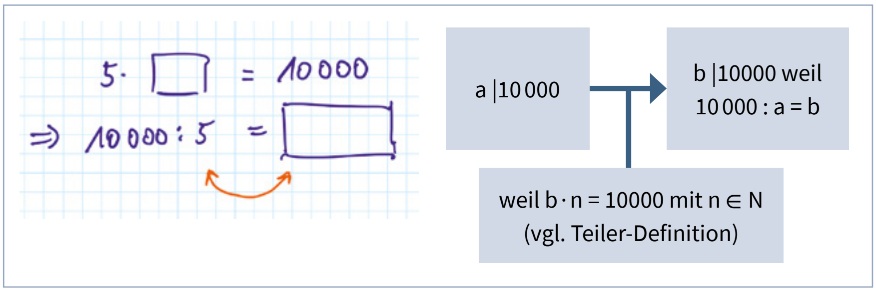



**Abb. 3**: Ansatz zum Finden der Teiler von 10 000 mit dazugehörigem Argumentationsschema nach Toulmin.

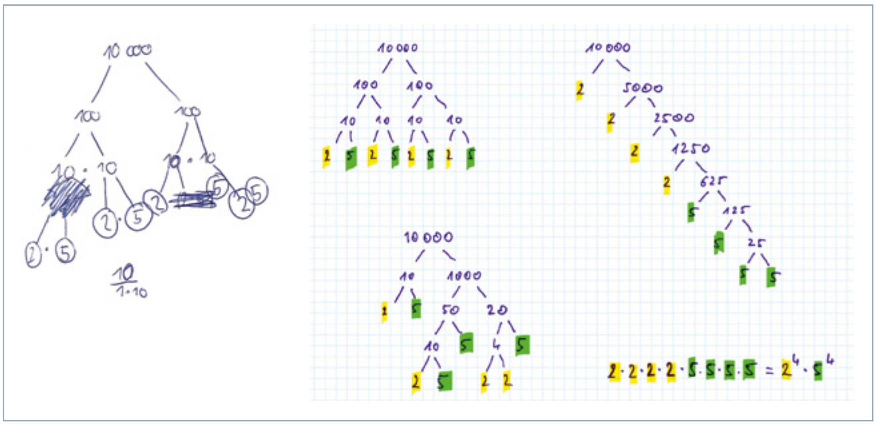


**Abb. 4**: Darstellung mit Hilfe von Zerlegungsbäumen

### Lernpfad konzipieren – beim Lernstand beginnen

Eine Argumentations- und Begründungskultur kann nur sukzessive und über einen längeren Zeitraum hinweg aufgebaut werden und kommt idealerweise als Leitkonzept in unterschiedlichen Ausprägungen in verschiedenen Inhaltsbereichen zum Einsatz (vgl. mathematik lehren 218 Langfristiger Kompetenzaufbau).

Es ist hilfreich, Lernpfade so zu konzipieren, dass die Lernenden die Möglichkeit erhalten, zunächst selbst erste Vermutungen zu formulieren, um diese dann unter Verwendung mathematischer Sachverhalte schlüssig zu begründen und anschließend in argumentativer Auseinandersetzung im Klassenzimmer reflektieren bzw. validieren. Ein solches *strukturiertes Gespräch über Mathematik* führt dazu, erste eigene Gedanken auszudrücken, zu argumentieren und gleichzeitig die Herangehensweisen anderer nachzuvollziehen. Dieses Gespräch ist insbesondere zu Aufgabenteil a) (Primfaktorzerlegung) möglich.

## Bearbeitungswege

Aufgabenteil a): Es kann bereits bei der Suche nach den Primfaktoren verschieden vorgegangen werden. Die Unterschiedlichkeit der Herangehensweisen bietet einen ersten Argumentationsanlass: Ist die Reihenfolge, wie man vorgeht, um auf die Primfaktorzerlegung zu gelangen, von Bedeutung? Oder anders gefragt: Kommt man immer zur selben Primfaktorzerlegung? Warum ist das so? Die Lernprodukte in **Abb. 4**

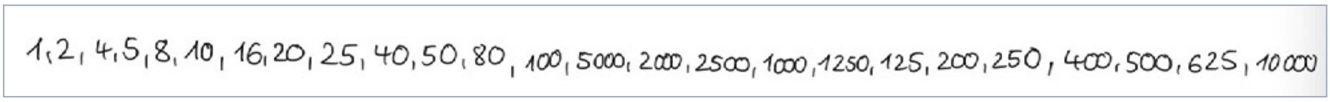



**Abb. 5**: Teiler der Zahl 10 000 suchen

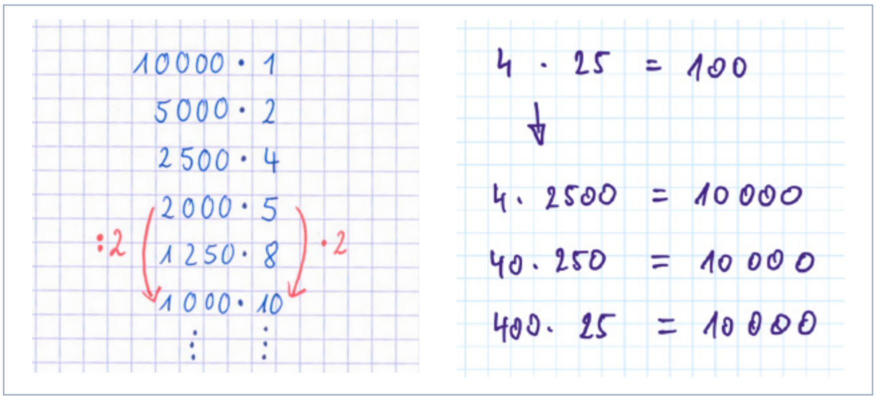



**Abb. 6**: Nutzen geschickter Notationen für das Finden von Teilern

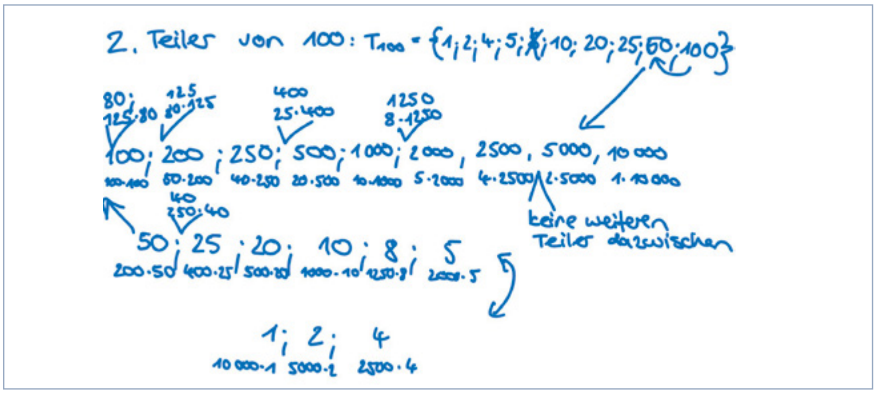



**Abb. 7**: Lösung mit Lücken

zeigen die unterschiedlichen Vorgehensweisen. Allein aufgrund der bildlichen Darstellung kann schon argumentiert werden: An den Enden stehen immer dieselben Zahlen in derselben Vielfachheit. Daher spielt die Reihenfolge hier keine Rolle. Ebenso kann auch „rückwärts" argumentiert werden: Betrachtet man das Produkt aller Primfaktoren und wendet das Kommutativgesetz an, zeigt sich, dass die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Aufgabenteil b): Die **Abb. 5** zeigt ein typisches Vorgehen bei der Suche nach Teilern: Zunächst wird klein angefangen und probiert. Dabei fällt auf, dass nicht jeweils Paare notiert werden, die zusammenpassen, wie etwa 2 und 5 000 bzw. 4 und 2 500. Die Komplementärteiler werden erst später sukzessive erkannt und ergänzt. Beim Lernprodukt in **Abb. 5** kommt der Lernende erst nach der Zahl 5 000 zu der Erkenntnis, dass es zu den bereits gefundenen Teilern immer noch einen weiteren Teiler geben muss. Dieses intuitive Vorgehen „von klein nach groß" stößt spätestens nach der 5 000 an Grenzen. Das ist die Stelle, an der erkannt wird, dass es zu den bereits gefundenen Teilern immer noch einen weiteren Teiler geben muss. Mit dieser Erkenntnis kann nun systematisch weitergesucht werden. Ausgehend davon, dass die 2 als Teiler gefunden wurde und damit auch die 5 000, kann durch das Prinzip „verdoppeln und halbieren" auf die beiden Teiler 4 und 2 500 geschlossen werden.

Diese Stelle eignet sich zum Argumentieren und kann mit der ganz einfachen Frage: „Warum funktioniert dieses Vorgehen?" und dem Zurückgreifen auf die Produktregel (z. B. 10 000 = 2 · 5 000 = 2 · 2 · 5 000 : 2) hervorgehoben werden. Auch eine geschickte Notation hilft hierbei (vgl. **Abb. 6**). Analog können auch die Überlegungen zur Verschiebung der Zehnerpotenz genutzt werden: Hier wurde zunächst von der einfacheren Überlegung mit der Zahl 100 ausgegangen und dann auf die Zahl 10 000 übertragen (100 = 10 · 10 = 2 · 5 · 2 · 5 → 10 000 = 100 · 100 = 2 · 5 · 2 · 5 · 2 · 5 · 2 · 5). Solche Stellen sollten genutzt werden, um von den Lernenden eine Begründung für ihr Vorgehen einzufordern: „Kannst du mir erklären, warum das funktioniert?" Mit diesen Ansätzen lassen sich

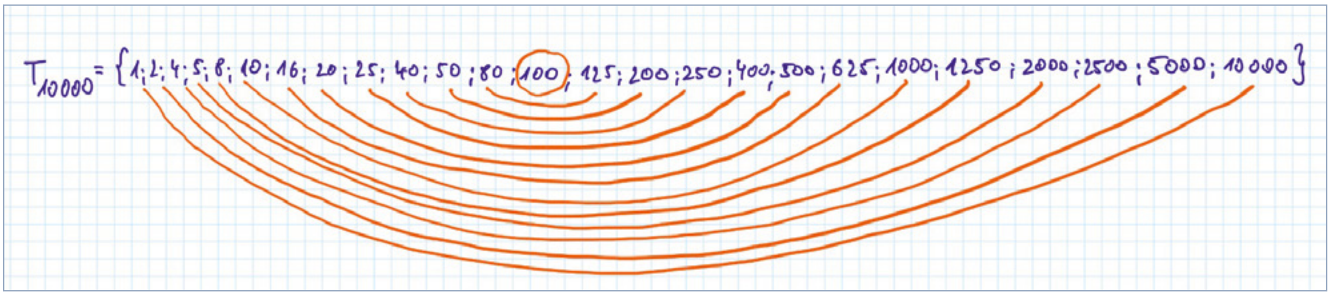



**Abb. 8**: Grafische Darstellung zur argumentativen Stützung des Ergebnisses

sicherlich einige Teiler finden – aber auch alle? Wohl eher nicht. Dass es immer noch Lücken gibt, die leicht übersehen werden können, zeigt etwa die Bearbeitung in **Abb. 7**.

Am nachträglichen Auffüllen zeigt sich, dass es immer noch eine Stelle gibt, an der etwas entdeckt wurde. Auch wenn zunächst von der vereinfachten Aufgabe mit der Zahl 100 ausgegangen wurde, so fehlt hier doch ein systematisches Vorgehen, um auch alle Teiler von 10 000 zu finden. Die Komplementärteiler-Idee ist sicherlich sinnvoll und führt auch zu der Erkenntnis, dass es eine ungerade Anzahl an Teilern geben muss, weil die 10 000 eine Quadratzahl ist – auch das ist eine schöne Stelle, um zu argumentieren! Mit einer grafischen Darstellung (vgl. **Abb. 8**) lässt sich das auch argumentativ stützen.

Für die Unterrichtsplanung ist es hilfreich, sich genau zu überlegen, wie die Lernenden am Übergang von individuellen und intuitiven Vorgehensweisen zum strategischen Arbeiten unterstützt werden können. Die hier dargelegten Überlegungen und grafischen Darstellungen können als Impulse gegeben werden.

### Lernprozesse fördern – Systematisierungsphasen nutzen

Inhaltlich ist es sicherlich notwendig, einzelne Impulse so zu setzen, dass damit auch eine substanzielle Begründung dafür erfolgen kann, wie man *alle* Teiler findet. Dazu ist eine systematische Auflistung der Primfaktor-Kombinationen hilfreich. Da die Lernenden in der Regel von den Teilern ausgehen und nicht von den Primfaktoren, könnte das so aussehen wie in **Abb. 9**. In der rechten Darstellung sind zeilenweise immer die Komplementärteiler dargestellt. Dabei wurden die Primfaktoren, die in der linken Spalte „noch nicht verbraucht wurden“ in der rechten Spalte (zeilenweise) immer „aufgefüllt“. In der linken Bearbeitung sieht man alle Teiler systematisch durch die Potenzen der Primfaktoren dargestellt. Das Dokument rechts unten zeigt die Darstellung der Zahl 10 000 als Primfaktorzerlegung, welche die Möglichkeit bietet alle Komplementärteiler

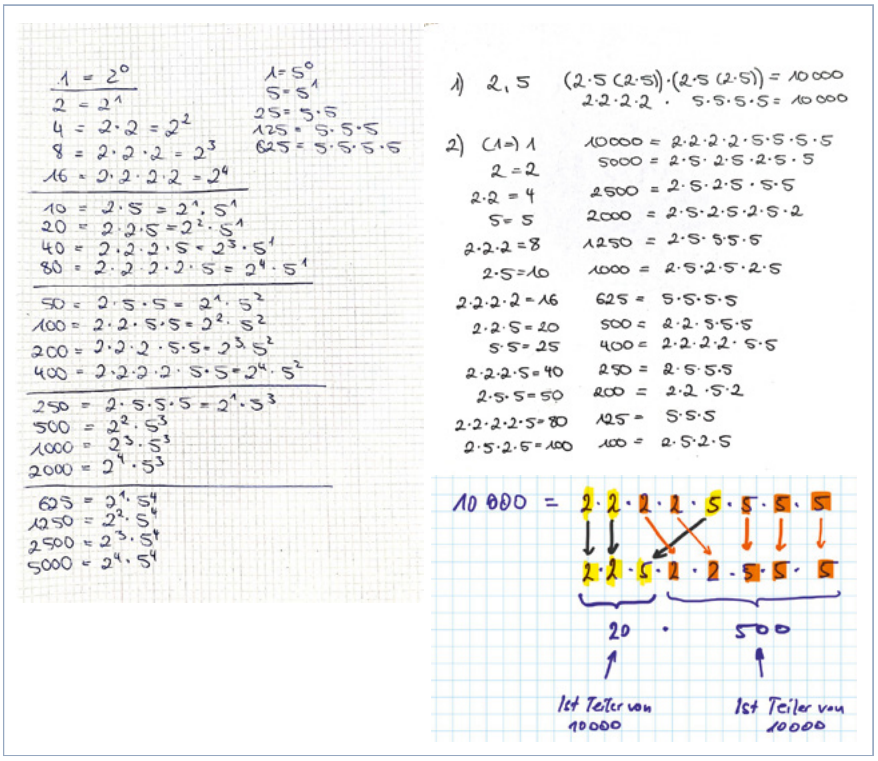



**Abb. 9**: Systematische Auflistung der Teiler von 10 000

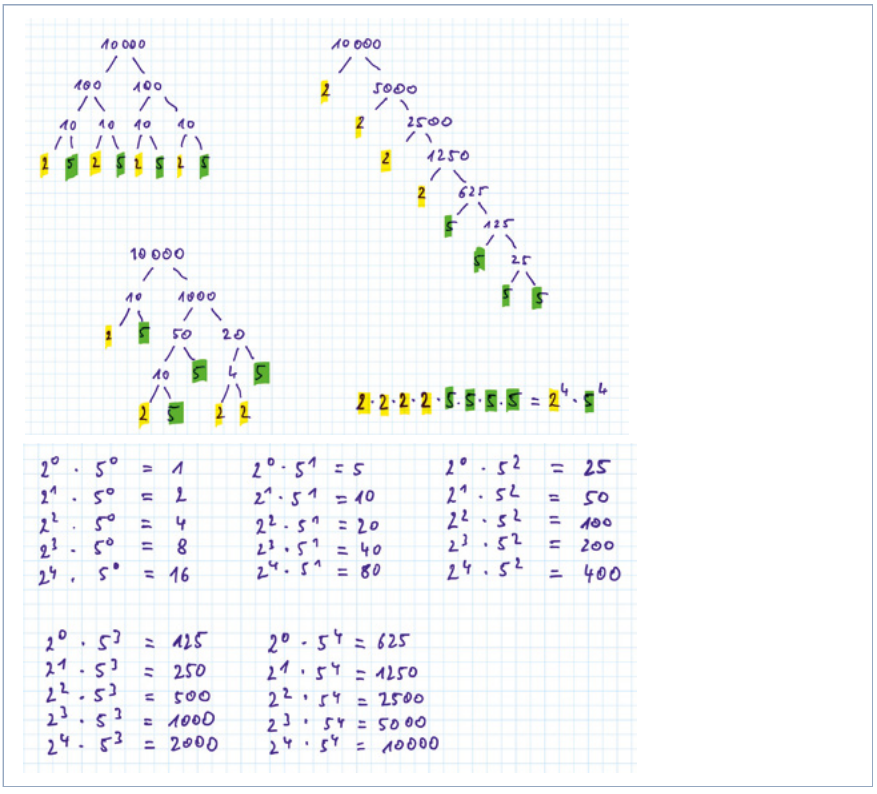


**Abb. 10**: Finale systematische Auflistung nach den zwei Aspekten der Aufgabe

durch Kombinationen der Primfaktoren zu finden. Die systematische Auflistung in **Abb. 10** führt schließlich dazu, alle Teiler zu identifizieren. Hier kann leicht erkannt werden, dass es 5 × 5 = 25 Teiler gibt. Die Exponenten werden also „um eins erhöht“ und miteinander multipliziert. Die „Erhöhung um eins“ kommt daher, dass auch „hoch null“ möglich ist.

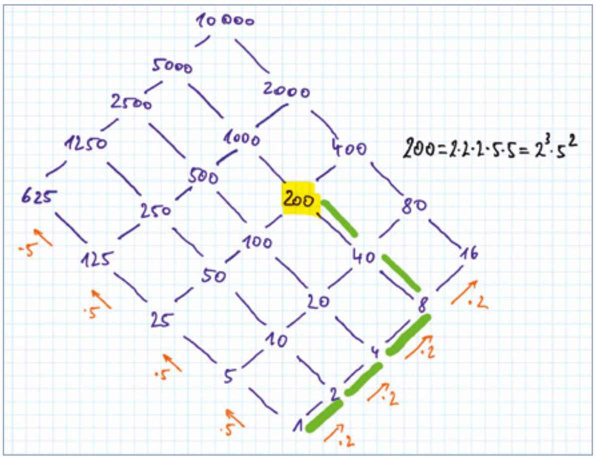



**Abb. 11**: Darstellung mit Hilfe eines Hasse-Diagramms

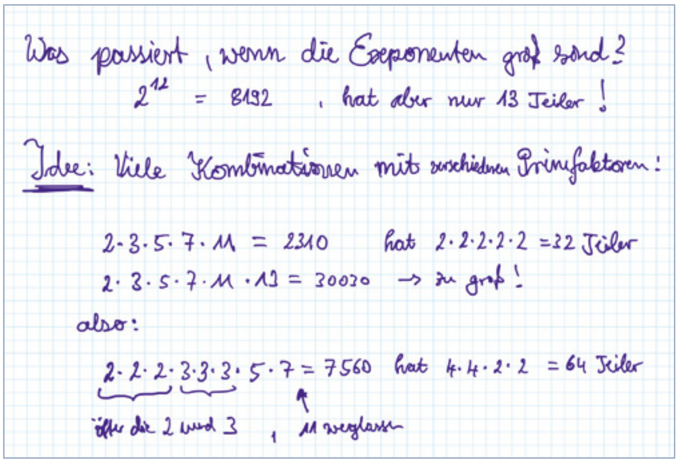



**Abb. 13**: Suche nach einer Zahl mit möglichst vielen Teilern

Eine für die Schule sicherlich nicht vertraute Darstellung ist die des Hasse-Diagramms, weshalb dieses sicherlich durch die Lehrkraft angeregt werden müsste (vgl. **Abb. 11**). Hier könnte z. B. der Anfang ausgehend von der 1 in die beiden Richtungen „mal 2“ und „mal 5“ vorgegeben werden (oder es wird das komplette Diagramm gezeigt und die Lernenden können daran entdecken, wie hiermit die Teileranzahl bestimmt werden kann).

Schlussendlich sollte zur abschließenden Beantwortung der Frage nach der Anzahl der Teiler von 10 000 auf die beiden Teilaspekte der Aufgabe eingegangen werden und dann kombinatorisch argumentiert werden: Da 10 000 als $2^4 \cdot 5^4$ dargestellt werden kann, ergibt sich die Menge aller Teiler durch die 25 Kombinationsmöglichkeiten der 2-er- und 5-er Potenzen (jeweils 5 Möglichkeiten). **Abb. 12** zeigt verschiedene visuelle Darstellungsmöglichkeiten für diesen Gedankengang.

Aufgabenteil c) (Welche Zahl unter 10 000 hat die meisten Teiler?) kann nun mit dem Gedanken der Kombinatorik gelöst werden: Es kommt ja darauf an, möglichst viele Kombinationsmöglichkeiten zu generieren. Dabei kann einerseits die Anzahl Primfaktoren, andererseits können die Exponenten erhöht werden. Hierzu zeigt **Abb. 13**, wie die Lernenden das ausprobieren – gerade durch Extremfälle wie „nur einen Faktor wählen“ wird deutlich, dass es eher wenige Teiler gibt. Werden hingegen mehrere Primfaktoren gewählt, gibt es mehr Teiler; allerdings wird dann die Zahl auch schnell zu groß – das kann nun ausgelotet werden, wie die Bearbeitung in **Abb. 13** zeigt.

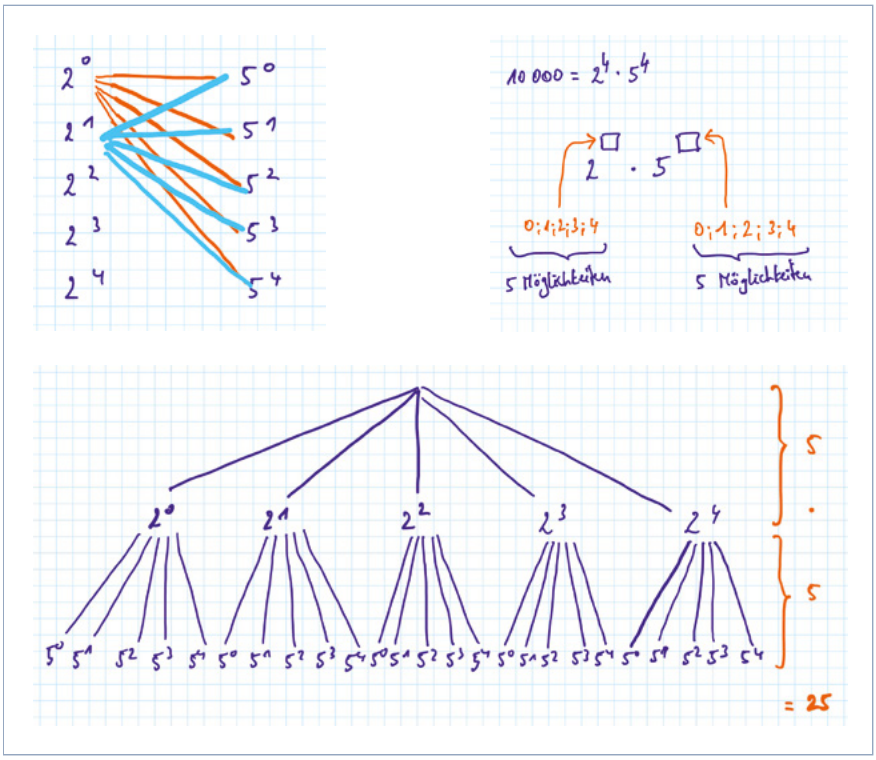



**Abb. 12**: Visuelle Darstellung der Argumentation für den kombinatorischen Ansatz

## Verstehensförderliche Gespräche mit allen moderieren

Eine große Herausforderung besteht darin, die Schülerinnen und Schüler untereinander zur Kommunikation anzuregen. Hierfür ist es sinnvoll, die Aufgabenbearbeitung nach dem Think-Pair-Share-Prinzip zu beginnen, da nach der Think-Phase in aller Regel unterschiedliche Teilergebnisse vorliegen, die dann für den Dialog in der Pair-Phase einen hohen Aufforderungscharakter haben. Für die Lehrkraft ist diese Phase enorm wichtig, denn hier können die für den späteren Diskurs im Plenum wichtigen Ansätze der Lernenden identifiziert werden. Konkret heißt das, dass die einzelnen Ansätze der Lernenden beobachtet werden und überlegt wird, welche sich eignen, um Diskussionen anzuregen (Holzäpfel 2023). Kriterien für die Auswahl einzelner Ansätze wären u. a.:

- möglichst kontrastierende Ansätze wählen, die dann in Beziehung zueinander gesetzt werden können (z. B. verschiedene Vorgehensweisen bei der Primfaktorzerlegung)
- typische oder auch systematische Fehler finden, die in Kontrast mit richtigen Lösungen abgeglichen werden; Gründe für die Fehler können überlegt und diskutiert werden
- unvollständige Lösungen darbieten und nicht gleich die richtige und vollständige Lösung einbringen, (z. B. werden nur die Exponenten 1, 2, 3 und 4 berücksichtigt und dabei die „hoch 0“ vergessen, hier könnte gefragt werden, wie der Teiler 5 dann dargestellt wäre)
- unklare, unvollständige oder auch falsche Äußerungen oder Behauptungen aufgreifen und durch geschicktes Re-Formulieren pointieren bzw. verstärken (z. B. „Es muss doch immer eine gerade Anzahl an Teilern sein“).

Um die Lernenden in Diskurs zu bringen, bietet sich die Gesprächstechnik des „Revoicing“ an (O'Connor/Michaels 1996; Forman u. a. 1998). Im Unterschied zum „Lehrerecho“, bei dem die Lehrkraft Aussagen von Lernenden wiederholt, geht es beim „Revoicing“, bei dem die Lehrkraft oder Lernende die Aussagen der Lernenden in eigenen Worten sinngemäß wiederholen, darum, ...

- Gedankengänge von Lernenden (noch einmal) zu explizieren
- Aussagen durch Wiederholung zu verstärken
- eine Positionierung vorzunehmen: Lernende herauszufordern, sich zu ihrer eigenen Aussage zu äußern – d. h., etwas ablehnen oder bekräftigen zu lassen
- widersprüchliche Aussagen in Beziehung zu setzen, Unstimmigkeiten hervorzuheben.

Um Diskurse im Klassenzimmer erfolgreich zu führen, können folgende Vorgehensweisen unterstützen:

- Wahl geeigneter Medien (z. B. Plakate, Padlets, Tafel) zur Kommunikationsunterstützung, z. B. um Aussagen zu sammeln und zu strukturieren oder grafische Darstellungen sichtbar zu machen (z. B. die verschiedenen Baumdarstellungen bei der Primfaktorzerlegung oder das Hasse-Diagramm)
- Verwenden geeigneter Darstellungen (wie z. B. das Hasse-Diagramm oder die Baumdarstellung), um besser über die relevanten Dinge (etwa Vernetzung der genutzten Darstellungen) sprechen zu können
- sprachliche Unterstützung, um auch schwierige Überlegungen (präzise) ausdrücken zu können
- Lernstände identifizieren und (individuell) passende Anforderungen stellen bzw. auch die Einbindung möglichst aller Lernenden: Dazu gehört auch, zueinander passende Ansätze aufeinander zu beziehen – d. h. zu wissen, welche Schülerinnen und Schüler an diesen Stellen aufgerufen werden sollten
- unterschiedliche Lösungen bzw. Fehler nutzen und diese gezielt adressieren – mit dem Ziel, kognitive Konflikte zu erzeugen bzw. aufzulösen
- immer wieder geeignete Fragen stellen wie z. B.
  „(Warum) Ist das so?“,
  „(Wie) Kannst du dir sicher sein?“,
  „(Wie) Kannst du das erklären?“.

Wesentlich ist es, den Dialog möglichst zwischen den Lernenden anzuregen. Hierzu ist es hilfreich, sich als Lehrkraft mit inhaltlichen Äußerungen weitestgehend zurückzuhalten und die Überlegungen und Fragen immer wieder in die Klasse zurückzuspielen.

Insgesamt geht es bei der hier vorgestellten Unterrichtsidee nicht so sehr darum, dass alle Lernenden die Aufgaben vollständig lösen, sondern vielmehr darum, das Argumentieren zu üben, also Gesprächs-/Denkmomente zu identifizieren, die Argumentationsmöglichkeiten darstellen, und die Lernenden dabei zu unterstützen, diese mit eigenen Argumentationen zu füllen.


### Literatur

Bardy, T./Holzäpfel, L./Leuders, T. (2021): Adaptive Tasks as a Differentiation Strategy in the Mathematics Classroom: Features from Research and Teachers' Views. – In: Mathematics Teacher Education and Development 23(3), S. 26 – 53.

Biehler, R./Kempen, L. (2016): Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 1(37), S. 141 – 179.

Brunner, E. (2014): Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Springer Berlin Heidelberg.

Forman, E. A./Larreamendy-Joerns, J./Stein, M. K./Brown, C. A. (1998): “You're going to want to find out which and prove it”: Collective argumentation in a mathematics classroom. – In: Learning and instruction, 8(6), S. 527 – 548.

Holzäpfel, L. (2023): Kommunikationsförderung durch Think–Pair–Share? Auf die Aufgabe kommt es an! – In: mathematik lehren 238, S. 17 – 20.

Holzäpfel, L./Lacher, M./Leuders, T./Rott, B. (2018): Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken. Klett Kallmeyer.

Krummheuer, G. (2003): Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 35, S. 247 – 256.

Meyer, M./Prediger, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. – In: Praxis der Mathematik in der Schule 51(30), S. 1 – 7.

Reiss, K. (2002): Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. – In: Projektserver SINUS. Bayreuth: Universität.

Toulmin, S. E. (1996): Der Gebrauch von Argumenten (2. Aufl.). Weinheim, Beltz.


Foto: Lars Holzäpfel

D

## Differenzierung auf den Punkt gebracht

**Aspekte der Heterogenität:**
- Argumentationsfähigkeit und strukturiertes Vorgehen beim Problemlösen

**Methode:**
- dialogorientierte Moderation

**Praxistipp:**
Planen Sie genügend Zeit für den Austausch und bringen Sie Lösungsbeispiele bei Bedarf gezielt in die Diskussion ein.

GILBERT GREEFRATH, BÄRBEL BARZEL, MAREIKE NAGEL

# (Auf) Schriftliche Prüfungen vorbereiten

## … konstruktiv in allen Klassen bis zum Abschluss

**LERNGRUPPE:** ab 7. Schuljahr

**IDEE:** Unterricht und Prüfungen lassen sich konstruktiv verbinden, mit Durchgängigkeit und Verstehensorientierung als leitenden Prinzipien

**PRINZIPIEN:** Durchgängigkeit, Verstehensorientierung

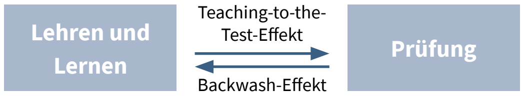

**VORWISSEN:** Checklisten zur Prüfungsvorbereitung nutzen

**MATERIAL:** Prüfungsaufgaben und passende Checklisten

**ZEITBEDARF:** 2 Unterrichtsstunden

### 1 | Wissenswert: Fallstricke bei der Prüfung

**Backwash**




Der sogenannte Backwash-Effekt beschreibt, wie Prüfungen einen rückwirkenden Einfluss auf den Unterricht ausüben können. Kritisch ist dabei die häufige Fokussierung auf die Prüfungsinhalte. Dann neigen Lehrkräfte dazu, Testaufgaben unter den Bedingungen der Prüfung zu trainieren, ohne eine tiefergehende Reflexion oder passende Erweiterung der Lerninhalte zu integrieren (s. Prodromou 1995).

**Teaching-to-the-Test**

Der Teaching-to-the-Test-Effekt beschreibt Mechanismen, bei denen der vorangehende Unterricht aufgrund eines anstehenden Tests verändert und angepasst wird. Dann werden Lehrinhalte und Methoden möglicherweise eher darauf ausgerichtet, die spezifischen Anforderungen des Tests zu erfüllen, anstatt ein breiteres Verständnis und tieferes Wissen bei den Lernenden zu fördern. Dies kann zu einer geringeren Motivation und zu einer begrenzten Lernerfahrung führen, die sich primär auf das Bestehen des Tests konzentriert, anstatt umfassendere Kompetenzen zu vermitteln (Oerke u. a. 2013).

Am Ende schulischer Bildungsabschnitte stehen oft zentrale Prüfungen, wie die am Ende der 10. Klasse. Aufgaben zum Lernen und Prüfungsaufgaben haben oft unterschiedliche Eigenschaften (s. **Abb. 1**). Im Idealfall sind schriftliche Prüfungen, zu denen sowohl zentrale Abschlussprüfungen als auch Klassenarbeiten sowie Tests gehören, und Unterricht gut aufeinander abgestimmt. Klar formulierte Kompetenzen sind der Schlüssel für diese Abstimmung zwischen Unterricht und Leistungsüberprüfung im Sinne der Durchgängigkeit. Die Bildungsstandards sollen daher neben kompetenzorientiertem Unterricht auch transparente Anforderungen schaffen und so die Grundlage für die Überprüfung der erzielten Ergebnisse bieten. Die hier relevanten zentralen Prinzipien für den Unterricht sind Durchgängigkeit und Verstehensorientierung.

### Lernen und Prüfen aufeinander abstimmen

Oftmals funktioniert die Abstimmung zwischen Unterricht und Prüfungen nicht, wenn zum Beispiel die Lehrenden den Fokus primär auf den Lehrplaninhalt legen und die Prüfung lediglich als lästiges Anhängsel betrachten. Das mag zwar den Lernenden, die intrinsisch motiviert sind, gerecht werden, jedoch weniger jenen, die oberflächlich lernen und ihr Hauptaugenmerk auf das Bestehen der Prüfung richten.

Prüfungen und Unterricht beeinflussen sich jedoch gegenseitig. Daher gibt es Fallstricke, die man sich bewusst machen muss. Man spricht hier etwa von „Backwash-Effekt" und „Teaching-to-the-Test-Effekt" (s. **Kasten 1**).

Dies gilt sowohl kurzfristig für Tests als auch langfristig für schriftliche Prüfungen bis zum Schulabschluss. Daher wird im Kontext der konstruktiven Passung („constructive alignment" nach Biggs/Tang 2011) empfohlen, größtmögliche Klarheit bezüglich der Lernziele zu schaffen und eine

| **Unterrichts-situation** | **Lernsituationen** | | | **Leistungssituationen** | |
|---|---|---|---|---|---|
| Funktionen der Aufgaben | Entdecken | Systematisieren | Üben | Diagnose | Leistungs-überprüfung |
| typische Eigenschaften/ Aufforderungen | • offen<br>• aktivierend<br>• zugänglich<br>• adressaten-gerecht | • vergleichend<br>• systematisch darstellend | • flexibilisierend<br>• anwendend<br>• reflektierend | • fordern aussagekräftige Produkte<br>• auf verschiedenen Niveaus lösbar<br>• fokussiert auf Teilkompetenzen | • Verfahren und Verstehen, z. B. durch Aufgaben im Kontext<br>• Begründungen und Beispiele fordern<br>• Umkehren der Frage |

**Abb. 1**: Funktionen von Aufgaben (s. Leuders 2006)

bestmögliche Abstimmung zwischen dem Lernprozess und der Leistungsbewertung anzustreben (s. **Abb. 2**).

## Durchgängigkeit

Betrachten wir zum Beispiel den Erwerb von Medienkompetenz als Lernziel und die Nutzung eines Computeralgebrasystems in der Prüfung, während beim Lernen im Unterricht lediglich ein Funktionenplotter genutzt wird. Hier stimmt die Passung von Unterricht und Prüfungen nicht und das Lernziel einer umfassenden Medienkompetenz wird so auch nicht erreicht.

Umgekehrt ist aber eine vielfältige Nutzung von Medien zum Lehren und Lernen im Unterricht und eine stark eingeschränkte Nutzung in der Prüfung, etwa um gleiche und gut kontrollierbare Bedingungen mit einem einfachen Taschenrechner herzustellen, auch nicht im Einklang mit einem konstruktiven Alignment: Unterricht und Prüfungen sind ebenfalls nicht aufeinander abgestimmt. Auch so kann das Lernziel, Medienkompetenz zu erwerben, nicht vollständig erreicht werden.

Hier setzt das Prinzip der Durchgängigkeit an und zielt darauf ab, langfristiges Lernen zu fördern. Dies geschieht, indem grundlegende Ideen, Inhalte und Aufgaben über verschiedene Schulstufen hinweg wiederholt und vertieft behandelt werden. Im Sinne des konstruktiven Alignments sind dann die Lernziele, etwa der Erwerb allgemeiner Kompetenzen wie Mediennutzung oder Problemlösen, über Jahre hinweg leitend für Unterricht und Prüfungen als eine Einheit.

Ebenso relevant ist hier die Verstehensorientierung. So kann die Mediennutzung zum Verständnis der mathematischen Inhalte beitragen und dies dann für Unterricht und Klassenarbeiten gleichermaßen relevant sein. Dies wäre sogar sinnvoll, wenn die Medien in einer späteren Abschlussprüfung nicht mehr zugelassen wären.

### Von der Checkliste zum Erwartungshorizont

Die Durchgängigkeit von Unterricht und Prüfungen zeigt sich exemplarisch, wenn die Checkliste zur Vorbereitung der Klassenarbeit im Unterricht und der Erwartungshorizont der Klassenarbeit gut zusammenpassen.

Am Beispiel der Pinguin-Aufgaben (s. **Abb. 3**) wird deutlich, wie eine passende Checkliste gestaltet werden kann. Für die beiden Aufgaben könnte man beispielsweise angeben:

- Ich kann mit den Termen zur Flächeninhalts- und Umfangsberechnung von Trapezen umgehen.
- Ich kann Überlegungen und Lösungswege zu Flächeninhalts- und Umfangsberechnungen von Trapezen verständlich darstellen und in Bezug auf den Sachkontext bewerten.

Die Lernenden können dann hierzu passende Übungsaufgaben, zum Beispiel aus dem Schulbuch, bearbeiten

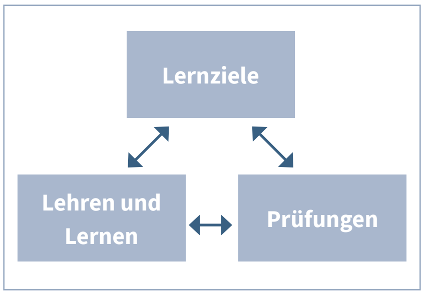



**Abb. 2**: Konstruktives Alignment: bestmögliche Abstimmung zwischen dem Lernprozess und Prüfungen durch Transparenz der Lernziele

und auf einer Zielscheibe angeben, wie gut sie diese Kompetenz aus ihrer Sicht bereits verinnerlicht haben.

Der passende Teil des Erwartungshorizontes der Klassenarbeit würde dann hier anschließen:

- Aufgabe 3 a) Der Flächeninhalt der Rechtecke wird berechnet, 217,5; 186; 246,5; 201.
- Aufgabe 3 b) Der Umfang der Trapeze wird berechnet, 62,5; 56; 69; 61.

Die Lernenden können nach der Rückgabe der Klassenarbeit den Erwartungshorizont praktisch direkt neben die Checkliste legen und schauen, wie sich ihre Selbsteinschätzungen vor der Klassenarbeit und ihre Ergebnisse unterscheiden. Sie können so ihre Selbsteinschätzung – falls nötig – verbessern und erkennen, wie Unterricht und Prüfung miteinander verbunden sind. Für die Lehrkräfte wiederum ist dies eine gute Möglichkeit, Unterricht mit Checklisten zu optimieren und die

**Aufgabe 3 Ein neues Pinguinbecken**
Der Zoo Hannover plant ein neues Becken für die Pinguine. Hierfür stehen verschiedene Grundrisse zur Auswahl (Maße in m, Abbildungen nicht maßstabsgetreu).

a. Die Tiere sollen möglichst viel Platz haben. Hilf der Zoowärterin und bestimme das größte Becken.
b. Vom Rand sollen möglichst viele Personen bei der Fütterung zuschauen können. Entscheide dich begründet für ein Becken.

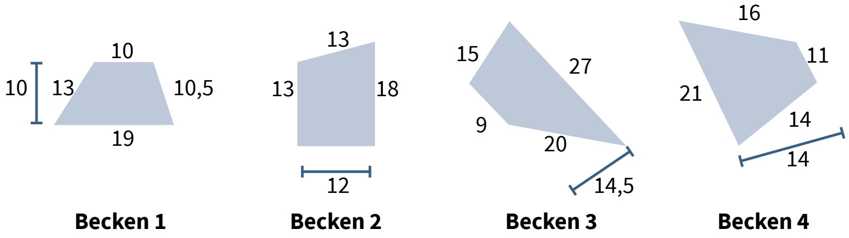
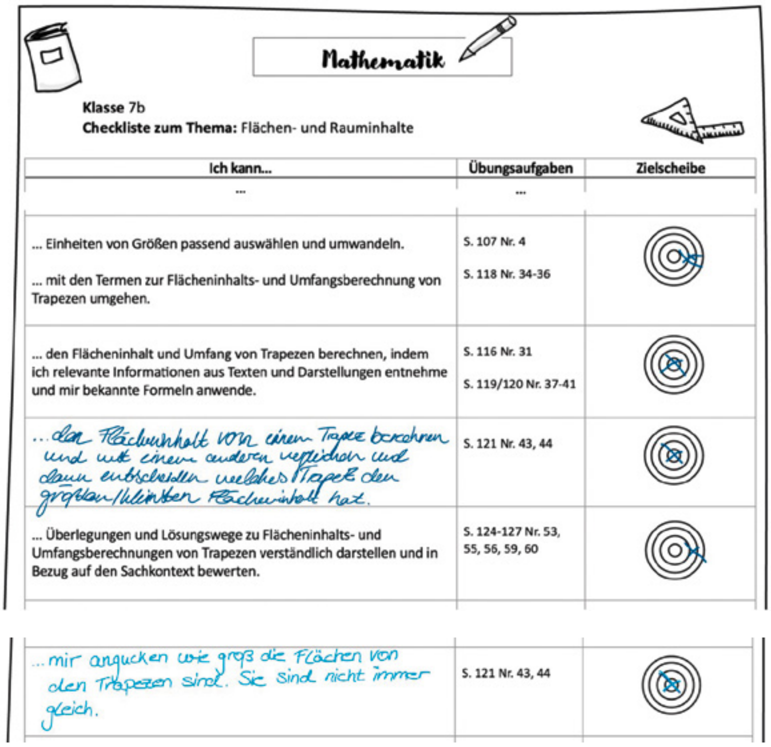



**Abb. 3**: Klassenarbeitsaufgabe zu Flächeninhalt und Umfang



Mathematik

**Klasse** 7b
**Checkliste zum Thema:** Flächen- und Rauminhalte

| Ich kann... | Übungsaufgaben | Zielscheibe |
|---|---|---|
| ... | ... | |
| ... Einheiten von Größen passend auswählen und umwandeln.<br>... mit den Termen zur Flächeninhalts- und Umfangsberechnung von Trapezen umgehen. | S. 107 Nr. 4<br>S. 118 Nr. 34-36 | |
| ... den Flächeninhalt und Umfang von Trapezen berechnen, indem ich relevante Informationen aus Texten und Darstellungen entnehme und mir bekannte Formeln anwende. | S. 116 Nr. 31<br>S. 119/120 Nr. 37-41 | |
| ... den Flächeninhalt von einem Trapez berechnen und mit einem anderen vergleichen und dann entscheiden welches Trapez den größten/kleinsten Flächeninhalt hat. | S. 121 Nr. 43, 44 | |
| ... Überlegungen und Lösungswege zu Flächeninhalts- und Umfangsberechnungen von Trapezen verständlich darstellen und in Bezug auf den Sachkontext bewerten. | S. 124-127 Nr. 53, 55, 56, 59, 60 | |
| ...mir angucken wie groß die Flächen von den Trapezen sind. Sie sind nicht immer gleich. | S. 121 Nr. 43, 44 | |

**Abb. 4**: Ausschnitt aus der Checkliste für Lernende

erworbenen Kompetenzen in der Prüfung passend abzubilden. Checklisten – rechtzeitig geplant – dienen als Orientierungshilfe für Lehrpersonen und zur Erstellung des Erwartungshorizonts der passenden Prüfungsaufgaben.

Interessant ist hier auch, wie eigentlich die Lernenden die Checkliste geschrieben hätten. Wichtig ist ja, dass diese Liste auch verständlich und gleichzeitig passend ist. Daher ist gelegentlich ein Abgleich sinnvoll, wenn die Lernenden selbst an Checklisten arbeiten und diese untereinander vergleichen: Inwieweit sind sie umfassend, korrekt und treffend formuliert und wo braucht es Unterstützung?

→ *Erstellt einen Eintrag für eure Checkliste zur Vorbereitung der Klassenarbeit zu diesen Aufgaben. Vergleicht eure Einträge untereinander und besprecht die Unterschiede.*

Das Beispiel in **Abb. 4** zeigt zwei Produkte zu Checklisten. Es wird deutlich, wie unterschiedlich detailliert die Lernenden die Anforderungen wahrnehmen. Eine gemeinsame Diskussion über Anforderungen von Aufgaben ist also sinnvoll. Dabei ist es auch wichtig, über die verwendeten Verben, die im Zusammenhang mit Arbeitsaufträgen auch Operatoren genannt werden, genau nachzudenken. Sie entscheiden stark über die erwartende Lösung, was etwa beim Abitur von besonderer Bedeutung ist (Barzel/Greefrath 2021).

## Prüfungsergebnisse individuell nutzen

Die Nutzung von Prüfungsergebnissen für die einzelnen Lernenden ist ein wichtiger Bestandteil des Weiterlernens. Sie sollte sich an folgenden Punkten orientieren, um auch durchgängig nutzbar zu sein (Sundermann/Selter 2006):

**Stärkenorientiert**: Fehler können und sollten als wertvolle Lernanlässe betrachtet werden. Indem Schülerinnen und Schüler ermutigt werden, aus Fehlern zu lernen, fördert die Leistungsbeurteilung die Weiterentwicklung ihrer Fähigkeiten und ihres Verständnisses.

**Differenziert**: Individuelle Förderhinweise sind von entscheidender Bedeutung, um auf die unterschiedlichen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler einzugehen. Die Beurteilung sollte daher auf eine Weise erfolgen, die es ermöglicht, gezielte Unterstützung anzubieten.

**Transparent**: Die Einbeziehung der Schülerinnen und Schüler in den Beurteilungsprozess schafft Transparenz und ermöglicht ihnen, ihre eigenen Fortschritte zu verstehen und zu beeinflussen.

**Informativ**: Neben dem Ergebnis selbst sollten auch die Denkwege und Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden.

**Prozessbezogen**: Die Beurteilung sollte sich nicht nur auf einfache

Abb. 4: © DZLM

Antworten beschränken, sondern auch die Entwicklung komplexer Kompetenzen im Kontext des Lernprozesses berücksichtigen.

**Umfassend**: Die Beurteilung sollte nicht nur auf bestimmte Punkte fokussieren, sondern alle Aspekte der Leistung der Schülerinnen und Schüler einschließen.

Ein Beispiel für eine individuelle, differenzierte und informative Rückmeldung zu einer Klassenarbeit mit Ansatzpunkten zur Fehleranalyse für Lernende zeigt **Abb. 5**.

### Prüfungsergebnisse für den Unterricht nutzen

Durchgängigkeit kann man auch andersherum betrachten. So können beispielsweise die Ergebnisse von zentralen Lernstandserhebungen wie VERA 8 für den Unterricht genutzt werden, um Unterricht und Prüfungen aufeinander abzustimmen. VERA findet in Klasse 8 und damit rechtzeitig vor der Abschlussprüfung statt, um Unterrichtsentwicklung zu ermöglichen. Die Ergebnisse der VERA-Tests können eine solide Grundlage für gezielte individuelle Unterstützungsmaßnahmen bilden. Lehrkräfte können auf Basis dieser Ergebnisse passende Unterstützung anbieten und den Unterricht entsprechend anpassen. Beispielsweise bietet VERAcheck (https://www.isq-bb.de/wordpress/veracheck/) erweiterte Ergebnisrückmeldungen an, die mit passgenauen Fördermaterialien verknüpft sind. Lehrkräfte erhalten hier für jede Kompetenzstufe Materialien zur gezielten Förderung. In anderen Ländern gibt es Aufgabensammlungen, die nach Kategorien filterbar sind und für den Unterricht genutzt werden können (wie zum Beispiel https://www.aufgabenbrowser.de).

Zusätzlich können die Ergebnisse von VERA als Ausgangspunkt für die gemeinsame Entwicklung des Unterrichts im Kollegium dienen. Die Länder bieten dazu sehr gut aufbereitete Ergebnisse an (https://www.projekt-vera8.de). Lehrkräfte können sich als Team mit den Ergebnissen auseinandersetzen und zusammen Strategien zur Verbesserung des Unterrichts erarbeiten.

| Aufgabe | Punkte | Du… | Fehler |
|---|---|---|---|
| Aufgabe 3 | 0,5/3 | **a)** … entnimmst dem Aufgabentext und den abgebildeten Figuren relevante Informationen (Flächeninhaltsberechnung von Trapezen, benötigte Maße zur Berechnung des Flächeninhalts).<br>… verwendest die dir bekannte Formel zur Flächeninhaltsberechnung der vier Trapeze und achtest auf die korrekte Verwendung der Einheiten (m, m²).<br>… vergleichst deine Ergebnisse miteinander und benennst basierend darauf das größte Becken. | **a)**<br>☒ Berechnung des Umfangs anstatt des Flächeninhalts der Trapeze<br>☒ Auswahl einer irrelevanten und unpassenden Länge/Höhe zur Berechnung des Flächeninhalts<br>☐ Verwendung einer falschen Maßeinheit<br>☐ Vergleich der Ergebnisse mit Schlussfolgerung fehlt<br>☒ Lösungsweg fehlt |
| | 2/3 | **b)** … entnimmst dem Aufgabentext und den abgebildeten Figuren relevante Informationen (Umfangsberechnung von Trapezen, benötigte Maße zur Berechnung des Umfangs).<br>… verwendest die dir bekannte Formel zur Umfangsberechnung der vier Trapeze und achtest auf die korrekte Verwendung der Einheiten (m).<br>(✓) … vergleichst deine Ergebnisse miteinander und entscheidest dich für das Becken, bei dem am meisten Menschen an der Umzäunung zuschauen können. | **b)**<br>☐ Berechnung des Flächeninhalts anstatt des Umfangs der Trapeze<br>☐ Auswahl einer irrelevanten und unpassenden Länge zur Berechnung des Umfangs<br>☒ Verwendung einer falschen Maßeinheit<br>☒ Vergleich der Ergebnisse ~~mit Schlussfolgerung fehlt~~<br>☐ |
| | /1 | Darstellung:<br>… dokumentierst deinen Lösungsweg nachvollziehbar. | |

**Abb. 5**: : Individuelle Rückmeldung zu einer Klassenarbeit mit Ansatzpunkten zur Fehleranalyse

## 2 | Wissenswert: Prüfungsaufgaben erstellen

- Verändern Sie komplexe Aufgaben, indem Sie unnötige Komplexität reduzieren und sich auf die relevanten Aspekte konzentrieren.
- Gestalten Sie Aufgaben so, dass individuelle Herangehensweisen möglich sind und nicht nur eine einzige erwartete Lösung absehbar ist.
- Ermutigen Sie Lernenden zur Eigenständigkeit durch klare Anweisungen, z. B.: „Begründe in eigenen Worten …"
- Fordern Sie von den Schülerinnen und Schülern, ihr gewähltes Vorgehen zu reflektieren, indem Sie erklären, beschreiben oder begründen, wie sie vorgegangen sind – dies sollte individuell und nicht schematisch erfolgen.

Um VERA optimal zu nutzen, empfiehlt es sich, die Ergebnisse als Teil eines kontinuierlichen Entwicklungsprozesses zu analysieren. Dabei können Lehrkräfte nach den Gründen für Stärken und Schwächen suchen, daraus die erforderlichen Maßnahmen ableiten und deren Wirksamkeit überprüfen. Hierbei ist die Zusammenarbeit im Lehrkräfteteam, insbesondere in Fachgruppen oder bei Fachkonferenzen, von entscheidender Bedeutung.

### Verstehensorientierung

Um konkret eine gute Passung zwischen Unterricht und Prüfungen zu erreichen, ist eine reflektierende Perspektive der Lernenden auf Prüfungsaufgaben erforderlich. Dann können nach der Klassenarbeit, die auch nicht am Ende der Unterrichtsreihe liegen muss, die Fehler konstruktiv zur individuellen Aufarbeitung genutzt werden (Blomberg 2021). Diese Reflexion

**D** **Differenzierung auf den Punkt gebracht**

**Aspekte der Heterogenität:**

- Sebstständiges Lernen, Metakognition zu Aufgabenformaten

**Methode:**

- Selbsteinschätzung mit Checklisten

**Praxistipp:**

Sie können auch Prüfungsaufgaben von Lernenden erfinden lassen, Analogien und Unterschiede von Aufgaben diskutieren.

### Beispielaufgabe zur Analyse

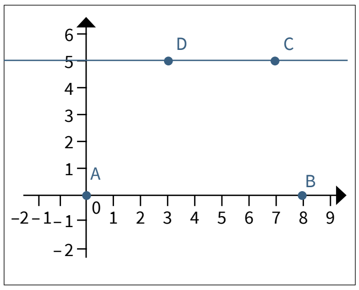
**Flächeninhalte**

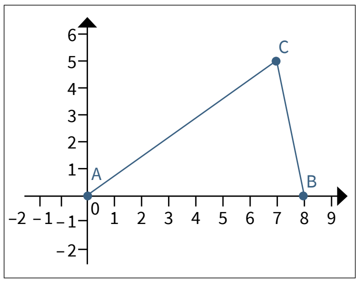
In einem Koordinatensystem ist die Strecke von A (0|0) nach B(8|0) gegeben und eine dazu parallele Gerade g durch die Punkte D [3|5) und C (7|5).

a. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

b. Erläutere mit Hilfe der Zeichnung, wie das Berechnen des Flächeninhalts eines Trapezes auf das Berechnen der Flächeninhalte von Rechtecken zurückgeführt werden kann. Begründe damit die Formel $A_{Trapez} = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ für das Trapez mit den zueinander parallelen Seiten a und c.

c. Mit einer Geometrie-Software wird der Punkt D auf den Punkt C gezogen. Dadurch entsteht ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.




**Anforderungen von zentralen Prüfungsaufgaben im Bereich Geometrie**

*Es ist wichtig, in Aufgaben zu erkennen, was man dazu können soll. Hier sind verschiedene Anforderungen gegeben. Ordne passende Anforderungen den Teilaufgaben oben zu.*

- Längen bestimmen
- relevante Größen ermitteln
- Hilfslinien einzeichnen
- den Flächeninhalt berechnen
- den Flächeninhalt berechnen
- eine Rechnung mit Variablen allgemein beschreiben
- kontrollieren, ob ein Ergebnis plausibel ist
- Flächen zerlegen und ergänzen
- Winkel mit Sinus / Kosinus berechnen
- Begründen mit Variable und Bild
- Lösungsweg erläutern

**Strategien, die dir in zentralen Prüfungsaufgaben helfen können**

*Bei einigen Teilaufgaben helfen dir bestimmte Strategien. Ordne auch diese den Teilaufgaben zu.*

- das Problem in eigenen Worten wiedergeben
- eine Skizze erstellen
- ein ähnliches Problem nutzen
- auf etwas Bekanntes zurückführen
- Gegebenes und Gesuchtes aufschreiben
- eine Vermutung formulieren und überprüfen
- eine andere Darstellung suchen
- Beispiele hinschreiben und ordnen
- eine grafische Darstellung nutzen
- Hilfslinien einzeichnen

**Abb. 6**: Beispielaufgabe, Anforderungen und Strategien in zentralen Prüfungen (nach Hußmann, S. u.a. 2017, S. 188).



kann nur gelingen, wenn die Inhalte wirklich durchdrungen und verstanden sind.

Das Prinzip der Verstehensorientierung besagt, dass Schülerinnen und Schüler mathematische Konzepte, Strategien und Verfahren am besten verstehen und beherrschen, wenn sie wirklich begreifen können, worum es geht. Das Verständnis wird beispielsweise aufgebaut, indem sie sich mit realen und sinnvollen Situationen beschäftigen, schrittweise zu komplexeren Verfahren übergehen und verschiedene Arten von Darstellungen, wie Bilder, Worte, Tabellen oder Grafiken, miteinander verbinden. Dieses Prinzip kann leitend bei der Erstellung von Prüfungsaufgaben unter dem Gesichtspunkt der Diagnose und Verstehensorientierung sein (s. **Kasten 2**).

Natürlich kann man noch viel mehr sinnvolle Kriterien für Prüfungsaufgaben formulieren. Einige Beispiele:

- Ein gelungener Kontextbezug in Prüfungen stellt sicher, dass die gestellten Aufgaben realitätsnah und relevant sind.
- Offene Aufgabenstellungen tragen zur Qualität der Prüfungen bei, indem sie den Schülerinnen und Schülern Freiheit bei der Lösungsfindung lassen.
- Durch Einbinden von Begründungen in den Prüfungsantworten wird auch das kritische Denken und die

Inhaltsverzeichnis



Fähigkeit zur Argumentation gefördert.

Darüber hinaus muss man auch auf Bearbeitungsumfang, Schwierigkeitsgrad und Wissensstufe aus dem Lehrplan achten. Und es gibt noch unzählige weitere Kriterien für gute Prüfungen.

Verstehensorientierung ist aber nicht nur ein hilfreiches Prinzip für den Unterricht und die selbst erstellten Diagnose- und Prüfungsaufgaben. Es kann auch für die Vorbereitung zentraler Tests und Prüfungen genutzt werden.

**Zentrale Prüfungen verstehensorientiert vorbereiten**

Auch zentrale Prüfungen können verstehensorientiert vorbereitet werden. Dabei ist es wichtig, nicht nur Aufgaben zu bearbeiten, sondern eine reflektierende Perspektive einzunehmen. So wird Metakognition bewusst gefördert. Der Blick auf die zentralen Testaufgaben kann sogar den Unterricht positiv beeinflussen, wenn etwa die Testaufgaben durch die angesprochenen Kompetenzen Anreize für Veränderungen der Unterrichtspraxis sind.

Hierzu ist im ersten Schritt eine Analyse der extern gegebenen Ziele anhand der Beispielaufgaben und des Curriculums erforderlich. Dann können im zweiten Schritt geeignete metakognitive Strategien bereitgestellt und an konkreten Beispielen reflektiert geübt werden (vgl. Hußmann u. a. 2017, S. 186).

Konkret kann dieser erste Schritt der Analyse für die Lernenden folgende Teilschritte beinhalten (vgl. **Abb. 6**):

**1. Prüfungsaufgaben anaylsieren**

a) Bearbeite die Beispiel-Prüfungsaufgabe.
b) Vergleiche deine Lösung mit der Musterlösung (erst nach dem vollständigen Bearbeiten).
c) Es ist wichtig, in Aufgaben zu erkennen, was man da können soll. Ordne passende Anforderungen den Teilaufgaben zu.
d) Bei einigen Teilaufgaben helfen dir bestimmte Strategien. Ordne auch diese den Aufgaben zu.

Im zweiten Schritt sollten vorhandene Beispielaufgaben für die zentralen Prüfungen genutzt werden. Wenn es auch sinnvoll ist, die Aufgaben zu bearbeiten und die Lösungen zu kontrollieren, sollten ein Augenmerk auf die Anforderungen und die Strategien gelegt werden.

**2. Selbstständig vorbereiten**

a) Besorge dir eine Sammlung von Prüfungsaufgaben, wie sie in deiner Abschlussprüfung zu erwarten sind. Deine Lehrerin oder dein Lehrer unterstützen dich dabei.
b) Bearbeite die Prüfungsaufgabe.
c) Vergleiche deine Lösung mit einer Musterlösung.
d) Schreibe nun die Anforderungen auf, die die Aufgabe stellt.
e) Vergleicht untereinander eure Listen.
f) Bei einigen Teilaufgaben helfen bestimmte Strategien. Schreibe auch die Strategien heraus. Vergleicht untereinander eure Listen.
g) Erstelle eine Checkliste, für welche Anforderungen du noch weiterüben willst.

Kompetenzerwerb geschieht langfristig. Es ist also erforderlich, die Vorbereitung der zentralen Prüfungen einige Schuljahre vorher zu beginnen und sowohl eine Tradition dieser Art Vorbereitung zu etablieren also auch eine entsprechende Haltung bei den Lernenden zu erreichen. Die Klassenarbeiten können also in ähnlicher Weise wie die zentralen Prüfungen gestaltet sein, damit sich die Schülerinnen und Schüler daran gewöhnen können.

Machen Sie Schülerinnen und Schülern die Kriterien und Leitlinien, die hinter Prüfungsaufgaben stecken, bewusst. Sie verhelfen den Schülerinnen und Schülern zu einem Blick aus einer anderen Perspektive, eben metakognitiv, auf Aufgaben und ihre eigenen Lösungen zu schauen (Barzel/Greefrath 2021).

**Literatur**


Barzel, B./Greefrath, G. (2021): Metablick auf Abituraufgaben. Mehr als nur alte Abi-Aufgaben rechnen. – In: mathematik lehren 225, S. 32 – 35.

Barzel, B./Leuders, T. (2021): Learning to the Test? – Wissen, was man lernt: Wie Lernen und Prüfen zusammengeht. – In: mathematik lehren 225, S. 2 – 7.

Biggs, J. B.,/Tang, C. (2011): Teaching for quality learning at university. What the student does. Open University Press.

Blomberg J. (2021): Fehler konstruktiv nutzen. – In: mathematik lehren 225, S. 8 – 11.

Hußmann, S./ Barzel, B./ Leuders, T./Prediger, S. (2017): mathewerkstatt 10. Cornelsen.

Leuders, T. (2006): Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. – In: Blum, W. u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen, S. 81 – 95.

Oerke, B./Maag Merki, K./Maué, E./Jäger, D. J. (2013): Zentralabitur und Themenvarianz im Unterricht: Lohnt sich Teaching-to-the-Test? – In: Bosse, D. u. a. (Hrsg.): Standardisierung in der gymnasialen Oberstufe. Springer, S. 27 – 49.

Prodromou, L. (1995): The backwash effect: From testing to teaching. – In: ELT Journal, 49(1), S. 13 – 25.

Sundermann, B./ Selter, C. (2006): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht: Gute Aufgaben, differenzierte Arbeiten, ermutigende Rückmeldungen. Cornelsen Scriptor.

Inhaltsverzeichnis



BÄRBEL BARZEL, GILBERT GREEFRATH, MAREIKE NAGEL, MAX HOFFMANN

# Digitalisierung als Chance für alle Prinzipien guten Unterrichts


Mathematische Kompetenzen digital zu fördern und digitale Kompetenzen mathematisch zu fördern – dies ist eine Forderung der neuen Bildungsstandards (KMK 2022) mit Blick auf eine Bildung in der digitalen Welt.

Gerade das Potenzial digitaler Medien für das fachliche Lernen wurde in vielen Studien bestätigt (Hillmayr u. a. 2017). Eine sinnvoll gestaltete Einbettung digitaler Medien bietet die Chance, allen fünf Prinzipien eines guten Unterrichts gerecht zu werden: *Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, kognitive Aktivierung, Lernendenorientierung & Adaptivität* und *Kommunikationsförderung*.

Die flächendeckende Nutzung digitaler Medien etabliert sich bislang nur zögerlich (Eickelmann u. a. 2018). Aber wie können wir Lehrkräfte stärken, digitale Medien sinnvoll einzusetzen? Wir möchten hier die Bandbreite der Möglichkeiten an Beispielen verdeutlichen, ihren Einsatz motivieren und Wege für einen guten Unterricht aufzeigen.

## Medien kennen, um sie gezielt auswählen zu können

Die Bandbreite an Medien ist groß (vgl. **Abb. 1**, Barzel/Schreiber 2017, Greefrath u. a. 2024). Es gibt allgemeine Medien wie Präsentationsmedien oder Video, die wie in jedem Unterricht auch in Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Es gibt aber auch eine Fülle mathematikspezifischer Medien, die gezielt das Lernen und Anwenden von Mathematik unterstützen können. Dabei lassen sich Medien danach unterscheiden, ob sie sich im Sinne eines digitalen Mathematikwerkzeugs für viele Themen jahrgangsübergreifend eignen (z. B. Tabellenkalkulation, Funktionenplotter, Geometriesoftware, Stochastiktools) oder digitale Lernmedien darstellen, die sich auf bestimmte Lernsequenzen beziehen. Beides ist für das Lernen von Mathematik sinnvoll.

Eine durchgängige Werkzeugnutzung von Lernenden führt zu einer guten Vertrautheit in der Bedienung, was gerade für alltags- oder berufsrelevante Werkzeuge (z. B. Tabellenkalkulation) bedeutsam ist. Und der selbstverständliche Umgang mit Werkzeugen eröffnet u. a. bei Modellierungs- und Problemlöseaufgaben neue heuristische Möglichkeiten, Ansätze und Lösungen zu finden.

Digitale Lernumgebungen bieten im Unterschied dazu passgenaue, geführte Aufgaben und gleichzeitig Möglichkeiten zum Visualisieren und Experimentieren. Die Grenzen zwischen Werkzeugen, Lernmedien und Lernumgebungen sind fließend, da sich mit digitalen Werkzeugen (z. B. GeoGebra oder Excel) auch ganze Lernumgebungen gestalten lassen und andersherum in Lernumgebungen gezielt digitaler Werkzeuge integriert werden können.

Die Fülle der digitalen Medien von allgemeinen bis mathematikspezifischen bzw. von Werkzeugen bis Lernmedien (s. **Abb.1**) bietet eine Chance, alle fünf Prinzipien für qualitätsvollen Mathematikunterricht im Lehr-Lern-Prozess medial zu unterstützen (vgl. **Tab. 1**). Dies wird bereits in den Bildungsstandards für das Abitur (KMK 2012) deutlich. Hier ist der Forschungsstand zum sinnvollen Einsatz überzeugend zusammengefasst: Das Potenzial

**Digitale Medien**

**Digitale Lernmedien**
*allgemeine digitale Lernmedien*
Wiki, Videos, digitales Schulbuch, Escape-Room, Virtual Reality, Augmented Reality …

**Digitale Werkzeuge**
*allgemeine digitale Werkzeuge*
z. B. Internet-Browser, Textverarbeitungsprogramme, 3D-Druck, KI-Sprachmodell …

**Mathematikspezifische digitale Lernmedien**
(z. B. interaktive Lernumgebung zur Bruchrechnung, Erklärvideo zum Satz des Pythagoras, Escape-Room Gleichungen …)

**Digitale Mathematikwerkzeuge**
z. B. Tabellenkalkulation, dynamische Geometriesystem, Computeralgebrasystem …

**Mathematikspezifische digitale Medien**

**Abb. 1**: Überblick über digitale Medien digitaler Mathematikwerkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- „beim *Entdecken* mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch *Verständnisförderung* für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger (auch dynamischer) Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der *Reduktion* schematischer Abläufe und der *Verarbeitung größerer Datenmengen,*
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von *Kontrollmöglichkeiten*.

Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung.“ (KMK 2012, S. 12f.) Die Prinzipien *Verstehensorientierung, Kognitive Aktivierung* und *Lernendenorientierung* klingen deutlich im ersten, zweiten und letzten Aspekt an. *Durchgängigkeit* bezogen auf die Nutzung in Unterricht *und* Prüfung wird im Nachsatz explizit benannt. *Kommunikationsförderung* ist mit Blick auf jegliche Interaktionen durch und mit digitalen Medien integrativ zu denken.

Die Übersicht in **Tab. 1** fasst zusammen, bei welchen unterrichtlichen Handlungen und Zielen digitale Medien konkret unterstützen können.

| |
|---|
| **Verstehensorientierung & digitalen Medien** |
| • Realkontexte leichter erfassen durch digitale Vermittlung (z. B. Mathe-Synthesizer, Video …)<br>• Darstellungen bewusst vernetzen beim Lernen und Anwenden, durch leichte Verfügbarkeit interaktiver Darstellungen (z. B. Töne, AR, VR)<br>• Zusammenhänge entdecken durch dynamische Visualisierungen<br>• Muster und Strukturen entdecken an Beispielen, die das Medium generiert.<br>• Selbstkontrolle und -reflexion durchführen durch direkte digitale Fehlermeldung, z. B. bei Gleichungen |
| **Kognitive Aktivierung & digitalen Medien** |
| • Fokussieren auf anspruchsvolle Denkhandlungen (z. B. des Entdeckens oder des produktiven Übens) durch die Auslagerung von Prozeduren an digitale Medien<br>• Vermutungen von Zusammenhängen überprüfen durch Nutzung von interaktiven dynamischen Visualisierungen (z. B. in Geometrie oder Algebra)<br>• Operationen schrittweise erfassen (Algorithmen) und kontrollieren durch die Eingabe in Tabellenkalkulation |
| **Durchgängigkeit & digitalen Medien** |
| • Darstellungsvernetzungen als selbstverständlichen Schritt vollziehen durch langfristig verfügbare digitalen Mathematikwerkzeuge in Schülerhand<br>• Bedeutung von Variablen bei verschiedenen algebraischen Handlungen betonen durch bewusste Bezugnahme zu den Eingabemodi (z. B. in TK Zellen beim Erstellen einer Formel nutzen, in CAS bewusste Angabe der Variable („ , x“) bei Gleichungen, Ableitungen, Integralen)<br>• Regelmäßiger Umgang mit Realdaten durch leichte Verfügbarkeit<br>• Bedienungselemente von digitalen Mathematikwerkzeugen für das mathematische Lernen nutzen und sukzessive erweitern |
| **Lernenden-Orientierung & digitalen Medien** |
| • Schüler:innen im Denken besser verstehen und individuell fördern durch Tools des formativen Assessments<br>• verschiedene Zugänge und Darstellungsweisen bei offenen Aufgaben unterstützen durch bewussten Rückgriff auf digitalen Mathematikwerkzeuge |
| **Kommunikationsförderung & digitale Medien** |
| • Interaktionen über mathematische Zusammenhänge anregen durch gemeinsames Betrachten von Bildschirmen<br>• Interaktionen in Distanz führen durch Kommunikationsmedien |

**Tab. 1**: Mögliches Potenzial der digitalen Medien zur Realisierung der fünf Prinzipien in den verschiedenen Unterrichtsphasen

## Lernsequenz „Sinus hören“: Parameter erkunden

Das Beispiel der digitalen Lernsequenz „Sinus hören“ (https://www.geogebra.org/m/gquzahqg) für die Oberstufe zeigt, wie durch digitale Medien Unterrichtsqualität im Sinne der fünf Prinzipien gesteigert werden kann. Im Kontext von Tönen wird hier die Bedeutung der Parameter der Sinusfunktion in der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ erkundet und systematisiert. Die Lernsequenz ist für das eigenständige Lernen in Partner- oder Gruppenarbeit als GeoGebra-Book konzipiert und enthält

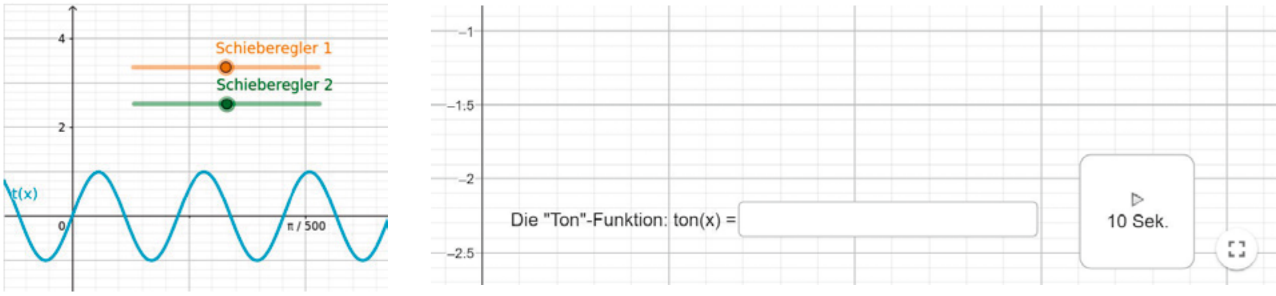
- Einstieg: Sinus und Töne
- Ein kleines Tonlabor
- Exkurs: Dreiklänge und Überlagerung
- Sinus-Transformationen am Graphen erkennen



Beim Einstieg in die Lernumgebung geht es um eine niedrigschwellige „Einstimmung“ in das Thema, bei der an eventuelle Vorkenntnisse aus der Sekundarstufe I angeknüpft wird, ohne dass diese hier notwendig sind. Daher ist der Start eine gezielte Aufgabe mit vorgegebenem Graphen und Schieberegler (s. **Abb. 2**, linke Seite). Zusätzlich zum Sichtbaren hört man den dargestellten Ton, der sich durch Bewegung der Schieberegler verändert. Es gilt, die Bedeutung der Schieberegler herauszufinden und „sprechende Namen“ (wie Lautstärke, Frequenz) zu geben. Das „Tonlabor“ ist ein Funktionenplotter verknüpft mit Akustik. Hier muss man selbst eine Funktionsgleichung mit Schieberegler eingeben, um hörbare Töne zu erzeugen (s. **Abb. 2**, rechte Seite).

## Verstehensorientierung

Ein mathematisches Konzept oder ein Verfahren zu verstehen, umfasst verschiedene Facetten (vgl. Prediger u. a. 2011), um souverän damit arbeiten zu können. Zum Verstehen eines




Beschreibe, welchen Einfluss die Schieberegler auf a) das Aussehen des Funktionsgraphen, b) den gehörten Ton haben. Finde darauf aufbauend sinnvolle Namen für die Beschriftung der beiden Schieberegler.

Erstelle ein eigenes kleines „Tonlabor“, bei dem du die Amplitude und die Frequenz durch je einen Schieberegler ändern kannst. Beachte dabei folgende Tipps:

- Die „ton“-Funktion ist allgemein von der Form ton(x) = a·sin(b·2·π·x). Überlege, wie a und b sinnvollerweise mit der Frequenz und der Amplitude zusammenhängen.
- Recherchiere für die Einstellung des Schiebereglers den Frequenzbereich der Töne eines Klaviers.

**Abb. 2.**: In der Lernsequenz „Sinus hören“ von Max Hoffmann (https://www.geogebra.org/m/mf3uxwqg) gibt es Arbeitsaufträge, bei denen GeoGebra als digitales Medium (linke Seite) und als digitales Mathematikwerkzeug fungiert (rechte Seite).

mathematischen Konzepts oder Verfahrens gehört,

- um Bedeutung(en) und Sinn eines Konzeptes oder Verfahrens zu wissen, über die entsprechenden Grundvorstellungen zu verfügen und die relevanten Darstellungen zu kennen,
- operativ damit umgehen zu können, z. B. einen Begriff oder einen Algorithmus am Beispiel konkretisieren oder abgrenzen zu können,
- relevante Fachbegriffe und Regeln zu kennen und richtig anwenden zu können.

Im Beispiel „Sinus hören“ ermöglicht das digitale Medium in besonderer Weise eine *Darstellungsvernetzung*, um die mathematischen Zusammenhänge zwischen Graph, Term und Kontext zu erkunden. Besonders wertvoll ist das Einbeziehen des Akustischen, da sehr leicht eine weitere Darstellungsebene (akustische Sinneswahrnehmung) eröffnet wird, um die wichtige Bedeutung der Sinusfunktion in der realen Welt der Akustik direkt zu erleben.

Sowohl in der GeoGebra-Lernumgebung „Sinus hören“ als auch in der noch näher am realen Kontext eines Mischpults entwickelten digitalen Experimentierumgebung „Mathe-Synthesizer“ (vgl. **Abb. 3**) werden Veränderungen stets dynamisch und interaktiv in verschiedenen Repräsentationen vernetzt und es können verschiedene Klänge „zusammengebaut“ werden, was eine Vielfalt an natürlicher Differenzierung und Themenerweiterung ermöglicht.

### Grundvorstellungsaufbau mit digitalen Medien

Digitale Medien bieten vielfältige Anlässe, um den Aufbau von Grundvorstellungen zu unterstützen. Alleine durch die interaktiv vernetzten, statischen wie dynamischen Darstellungen können etwa die Grundvorstellungen einer Funktion pointiert werden: der *Zuordnungsaspekt* mit Blick auf die Tabelle und einzelne Werte bzw. im Kontext der Sinusfunktion das Hören einzelner Töne, der *Kovariationsaspekt* durch das Dynamisieren von Tabelle und Graph, dem Verändern der Töne und der *Objektaspekt* mit Blick auf das Markante des Graphen oder den Term oder beides im Wechselspiel.

Auch durch gewisse Eingabemodi können Grundvorstellungen bewusst gemacht werden. So muss bei Computeralgebra immer wieder explizit angegeben werden, nach welcher Variablen man eine Gleichung löst, eine Ableitung oder ein Integral bildet. Das Medium erzwingt damit eine Denkhandlung, die immanent wichtig für das Verstehen ist – hier von Variablen. Das Bewusstmachen des Eingabeschritts schärft den Blick auf die unterschiedlichen Grundvorstellungen von Variablen, z. B. hier von Parametern (als allgemeine Zahl) und Funktionsvariablen (als Veränderliche). Diesen Trumpf kann man auch bei der Nutzung von Tabellenkalkulation ziehen: Man beginnt in einer Zelle mit einem einzelnen Wert, der aber zur allgemeinen Zahl oder auch zur Veränderlichen werden kann durch Kopieren und analoge Verwendung in vielen Zeilen; beim Nutzen der Zelle für eine Formel wird diese Zelle zur Variablen.

Auch Prozeduren und Operationen müssen verstanden werden, um operativ damit umgehen zu können. Unbestritten: Es besteht die Gefahr, gerade prozedurale Fertigkeiten zu verlernen, wenn sie zu oft an ein digitales Medium ausgelagert werden und kein anderer Umgang mit ihnen angeregt wird. Dies wird nicht erst seit Einführen des Taschenrechners diskutiert. Klar ist aber auch, dass Aufgabenkaskaden und Apps zum Üben, die allein dieses Abarbeiten von Prozeduren fordern, infrage gestellt werden. Das Positive daran: Der Einsatz digitaler Medien ermöglicht uns, den Blick auf das Verstehen der Prozeduren zu richten und dazu anregende Aufgabenformate zu wählen, z. B. solche zum produktiven sinnvollen Üben.

Ziel sollte sein, durch geeignete Aufgaben das Verstehen der inneren Strukturen und Abläufe bei Verfahren zu durchdringen, zum Beispiel durch Umkehraufgaben der Art „Nenne drei Beispiele linearer Gleichungen mit der Lösung $x = 3$“. Hier können digitale Medien (wie Computeralgebra oder entsprechende Apps wie Photomath) durch unmittelbare Selbstkontrolle

Abb. 2: screenshots erstellt mit GeoGebra sinnvoll individuell unterstützen. Auch helfen solche Medien, algebraische Prozeduren schrittweise durchzuführen bzw. nachzuvollziehen und durch direkte Fehlerrückmeldung selbst kontrollieren zu können.

## Kognitive Aktivierung

Kognitive Aktivierung ist ein wichtiges Kriterium bei der Auswahl digitaler Medien und der Unterrichtsgestaltung mit ihnen. Dies betrifft alle Phasen des Unterrichts vom Erarbeiten über das Systematisieren bis hin zum Üben. Wenn das Üben reines Kalkül bleibt, könnte das Denken im Lernprozess banalisiert werden. Auch Erklärvideos, die das Erklären auf eine Abfolge von Schritten „Wie es geht …" beschränken, reduzieren aufs Banale, da keine intensive Auseinandersetzung mit den Inhalten und kein nachhaltiges Lernen generiert werden.

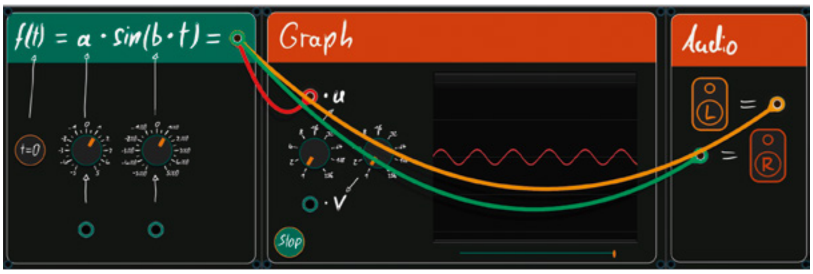
Wenn digitale Mathematikwerkzeuge wie Computeralgebra, Tabellenkalkulation oder Stochastiktools präsent sind, zwingt der Einsatz der digitalen Medien zur kognitiven Aktivierung, da tiefere Denkhandlungen als nur pures Kalkültraining beim Üben von prozeduralen Fertigkeiten notwendig werden.

Durch den Einsatz digitaler Medien wird kognitive Aktivierung angeregt, da Entdecken und Erkunden von Mustern und Strukturen durch das Generieren vielfältiger Beispiele in verschiedenen Darstellungen eine neue Aufgabenqualität liefert, die in allen drei Unterrichtsphasen relevant werden kann.

Die Impulse und Aufgaben zu digitalen Werkzeugen bzw. in digitalen Medien sollten dem Anspruch der kognitiven Aktivierung folgen, d. h., die intendierten Denkhandlungen sollten nicht nur auf dem untersten Anspruchsniveau des Reproduzierens liegen.

### Sinus hören

Betrachten wir dies an der Lernsequenz „Sinus hören": Bereits beim Einstieg geht es um ein leicht zugängliches Erkunden (**Abb. 2** links), welche Bedeutung die beiden Schieberegler im Musikkontext haben. Auch wenn dies auf einfacher Ebene geschieht, werden doch kleine Erkundungszyklen von Vermuten – Überprüfen – ggf.




**Der Mathe-Synthesizer**

Nicolas Regel (TU Dresden) hat den akustischen Realbezug mit seinem „Mathe-Synthesizer" realitätsnah aufbereitet (vgl. https://fr-vlg.de/mathe-synthesizer). Dabei werden die verschiedenen Repräsentationen der Sinusfunktion im Layout eines virtuellen Mischpultes dargestellt, die mit virtuellen „Kabeln" vernetzt werden. So entsteht ein authentischer Experimentierraum, der neben dem Untersuchen der mathematischen und akustischen Zusammenhänge die reale Bedeutung der Mathematik „am Mischpult" erleben lässt.

Quelle: https://tu-dresden.de/mn/math/analysis/didaktik/die-professur/mathe-synthesizer

**Abb. 3**: Darstellungen wählen und Entdeckungen am Mathe-Synthesizer machen zur Parameterbedeutung bei Sinusfunktionen

Korrigieren angeregt und es wird nach kreativen Namen gefragt.

Im „Tonlabor" (**Abb. 2** rechts) verschiebt sich der Fokus aufs Innermathematische und man muss selbst eine variable Graphik mit Schieberegler erzeugen. Hier muss zunächst der vorgegebene Term richtig erfasst und eingegeben werden, wobei auch hier kleine Erkundungszyklen mit Verifizieren und Falsifizieren stattfinden können, die sich auch auf die technische Bedienung des Systems beziehen. Beim Erzeugen der Schieberegler ist der direkte Bezug zum Klang der Töne gefragt, man muss gedanklich vergleichen und abgleichen, um einen klanglich relevanten Bereich für die Schieberegler zu finden. Und stets wird implizit ein Reden und Erklären des Gesehenen und Gehörten ausgelöst.

Im differenzierenden Exkurs zu „Dreiklängen und Überlagerung" (vgl. **Abb. 4**, oben), und auch in der Ausweitung auf alle Graphen zu

$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$

bei der vierten und letzten Aufgabe (**Abb. 4**, unten), geht es um das Erkunden noch komplexerer Muster und Strukturen in Term, Graphik und Hören, so dass die bereits genannten kognitiven Tätigkeiten eines experimentellen Problemlösens im Zusammenspiel mit einem Dokumentieren als Bündeln der Erkenntnisse angeregt werden.

## Durchgängigkeit

Digitale Mathematikwerkzeuge können langfristig über viele Jahrgänge genutzt werden. Im Idealfall ist die Bedienung so gut vertieft, dass man sich das System wirklich zu eigen gemacht hat. Dabei können Hürden, die zunächst nur technisch erscheinen, gut fürs fachliche Lernen genutzt werden. Eine Schülerlösung wie „Hier passt bestimmt die Fenstereinstellung zu den Sinus-Funktionen nicht – das kennen wir doch schon von den quadratischen Funktionen, da war der Bildschirm auch ab und zu leer." lässt sich mit dem Verweis auf die Unendlichkeit von Graphen, von der wir nur einen kleinen Ausschnitt sehen, inhaltlich unterlegen.

Dieses Wechselspiel von Bedienung und inhaltlichem Lernen bieten alle digitalen Mathematikwerkzeuge und bei wiederholter Nutzung entstehen viele „rote digitale Fäden" durch die Jahrgänge hinweg – neben den wachsenden Nutzungskompetenzen. Funktionenplotter wie im Beispiel „Sinus hören" können für alle Funktionsarten ab Klasse 7 einen ähnlichen Experimentierraum bieten, ob arrangiert in einer digitalen Lernumgebung oder durch Arbeitsaufträge auf Papier. Tabellenkalkulation lässt sich sogar noch früher zum Erkunden

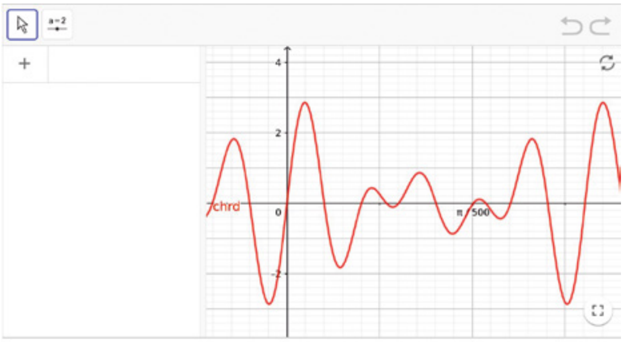
Icons: © DZLM
Abb. 3: screenshot erstellt mit Mathe-Synthesizer

### Exkurs: Dreiklänge und Überlagerung

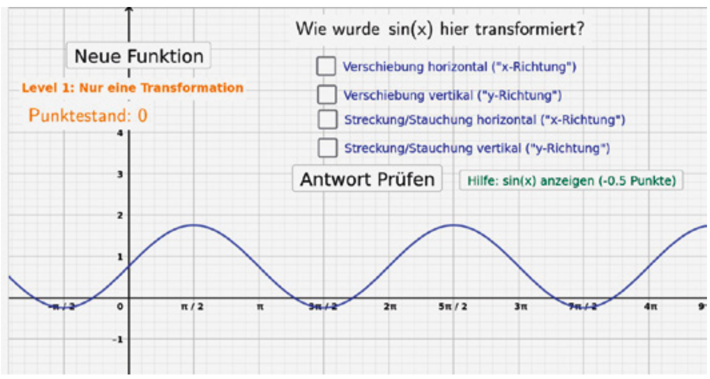
Spielt man mehrere Töne gleichzeitig, ergeben sich überlagerte Schwingungen. Im nachfolgenden Applet ist eine Funktion dargestellt, die einen Dreiklang beschreibt. Dabei wurden Töne entsprechend folgender Frequenztabelle verwendet:

| Ton | c | d | e | f | g | a | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequenz | 264 Hz | 297 Hz | 220 Hz | 352 Hz | 396 Hz | 440 Hz | 495 Hz |

Nutze GeoGebra um herauszufinden um welchen Dreiklang es sich handelt. Recherchiere den Namen des Akkords.



**Üben und Vertiefen: Sinus-Transformationen am Graphen erkennen**
Am Kontext der Töne hast du bereits zwei wichtige Transformationen der Sinus-Funktion kennengelernt: 1. Die horizontale Streckung → Frequenzänderung.
2. Die vertikale Streckung/Stauchung → Amplituden-/Lautstärkeänderung.
Aus der Unterstufe kennst Du bereits, dass Funktionen außerdem in *x*-Richtung und *y*-Richtung verschoben werden können. Im folgenden Applet kommt nun alles zusammen. Kannst du dem Graphen ansehen, was passiert ist?




Die Lernenden erkunden erst frei das Applet und reflektieren in einem zweiten Durchlauf hilfreiche Entscheidungsstrategien.

**Abb. 4**: Auszüge aus dem zweiter Teil der Lernsequenz „Sinus hören" mit differenzierendem Exkurs (oben) und Abschluss (unten).

von Zahlen oder auch Erfassen leichter Algorithmen verwenden, wie die neuen Beispielaufgaben zu den weiterentwickelten Bildungsstandards zeigen (https://fr-vlg.de/bista-mathe). Hier finden sich für Klasse 5/6 das Erstellen einer Bruchrechenmaschine als produktive Übungsaufgabe zum Bruchrechnen und für Klasse 7/8 gehaltvolle Lernumgebungen zu Größen (im Kontext Erstellen einer Rechnung im Malerbetrieb), zu Zinsrechnung und zu stochastischen Fragen (z. B. Simulation).

Die Tabellenkalkulation eröffnet dabei Durchgängigkeit nicht nur zeitlich in ähnlichen Inhaltsbereichen, sondern über die verschiedenen mathematischen Leitideen hinweg. Das digitale Medium fungiert hier als Träger des Anknüpfens und Fortsetzens nicht nur von Bedienungskompetenz, sondern oft verwoben mit inhaltlicher Kompetenz. Bei der Tabellenkalkulation ist dies die oben bereits beschriebene Schrittigkeit vom „Einzelwert in einer Zelle" über „Variabler Wert in dieser Zelle durch Kopieren" bis hin zum Nutzen dieser Zelle als Variable und Teil eines Terms. Diese Überlegung ist ganz im Sinne Newtons: „Algebra als verallgemeinerte Arithmetik". Auch für die anderen digitalen Mathematikwerkzeuge lässt sich Ähnliches konkretisieren, zum Beispiel wenn ein Schieberegler als „externalisierte Variable" wie im Sinusbeispiel fungiert.

Bezogen auf die Nutzung allgemeiner Medien im Mathematikunterricht (z. B. Videos) sollte Durchgängigkeit nicht nur als tradiertes Element auf der Oberflächenstruktur („schöne Methode") realisiert werden, sondern stets der Bezug zur Tiefenebene, dem Mathematiklernen, wahrgenommen und transparent gemacht werden. So erfordert das Erstellen eines Videos als Form der Präsentation von Gruppenarbeit neben Kreativität zur ansprechenden Gestaltung Klarheit und Verständlichkeit beim Verbalisieren der Ergebnisse, eine gute Zusammenfassung des Prozesses und vor allem mit Blick auf den inhaltlichen Kern eine gute Strukturierung und Korrektheit. Wenn solche Kriterien durchgängig klar werden und an den Bezug zum Lernen von Mathematik immer wieder erinnert wird, kann sich Tiefe nachhaltig entwickeln.

## Lernenden-Orientierung & Adaptivität

Digitale Medien, die gezielt die Lernendenorientierung in den Blick nehmen, sind sogenannte *Audience Response Systeme* (z. B. Plickers, Kahoot, Mentimeter ...), die im Unterrichtsprozess schnell und effizient Abfragen ermöglichen, etwa als Antworten zu Single-Choice- oder Multiple-Choice-Fragen oder auch als Freitextantworten. Sind die Fragen

Abb. 4: Screenshots erstellt mit GeoGebra (http://www.geogebra.org), Icons: © DZLM so gestellt, dass sie typische Fehlvorstellungen oder Verstehenshürden integrieren, können solche Abfragen einen schnellen Überblick geben, ob das Aktuelle verstanden wurde.

Es gibt viele gezielte Angebote im Internet, die damit werben, Lernende gut und adaptiv zu unterstützen. Hier ist jedoch Vorsicht geboten, denn gerade hinter „adaptiv" verbirgt sich oft der alleinige Fokus auf prozedurale Fertigkeiten und Schüler:innen erhalten allenfalls eine Korrektheitsprüfung nach richtig / falsch oder sehr allgemeine Tipps, die bei Fehlvorstellungen dann oft nicht den Kern treffen (Thurm/Graewert 2022). Wirklich adaptive Medien würden die individuellen Kompetenzen der Lernenden berücksichtigen und gezielt passende und damit kognitiv aktivierende Materialien für den jeweiligen Lernstand bieten.

Es gibt auch Angebote für die Hand der Lehrkraft, die deutlich gezielter Lernenden individuell helfen können und der Lehrkraft gleichzeitig einen tieferen Einblick in das Denken der Schüler:innen ermöglichen (vgl. etwa https://smart.dzlm.de/). Neben diesen für Diagnose und Förderung ausgerichteten Medien, bieten aber auch digitale Mathematikwerkzeuge das Potenzial zur Lernendenorientierung. Anne Fuglestad (2006) fand im Vergleich von sechs Klassen eines 9. Jahrgangs heraus, dass Schüler:innen bei Extremwertaufgaben wie „zu gegebener Zaunlänge eine größtmögliche Rechteckfläche an der Scheunenwand abtrennen" bewusst dasjenige Werkzeug auswählen, das am besten zu ihrem Zugang passt: Mit einem Geometrieprogramm, wenn man mit einer Grafik beginnen will; mit Funktionenplotter, wenn man den Term direkt sieht; mit einer Tabellenkalkulation, wenn man einzelne Werte ausprobieren will. Natürlich kannten die Lernenden in den sechs Klassen alle diese Werkzeuge. Dies zeigt die Bedeutung der passenden Medien und der jeweils integrierten Vielfalt an Darstellungsmöglichkeiten.

## Kommunikationsförderung

Die Kommunikation untereinander und mit der Lehrkraft ist essenziell für das Lernen von Mathematik.

- Das *Gespräch über Mathematik* regt dazu an, Gedanken zu vertiefen und verständlich auszudrücken, zu argumentieren, andere Perspektiven nachzuvollziehen und mit unterschiedlichen Ansichten umzugehen. Dadurch können die Lernenden ihre mathematischen Kompetenzen weiterentwickeln (*Lernen von- und miteinander*).
- Kommunizieren über Mathematik muss erst gelernt werden. Die *mathematikbezogene Sprachhandlungen* und dafür notwendigen *Sprachmittel* sind also auch Lerngegenstand. Dazu wird Sprache im Unterricht eingefordert, unterstützt und sukzessive aufgebaut für die Bewältigung der jeweils fachlich relevanten sprachlichen Anforderungen (*fachbezogene Sprachbildung*).

Kommunikationsförderung sollte explizit sein beim Einsatz digitaler Medien, damit die Kommunikation nicht reduziert bleibt auf die Kommunikation *mit* dem Medium. So ist es bei der Lernumgebung „Sinus hören" nicht nur wichtig, wie die Lernenden mit dem GeoGebra Book arbeiten können, sondern es muss auch überleget werden, wie sie miteinander an den Aufgaben in der digitalen Umgebung arbeiten. Deshalb ist während des Unterrichts bewusst darauf zu achten, der Vereinzelung entgegenzuwirken und Kommunikation *über* das Medium auszulösen (Classroom Management). Dazu gehören alle Impulse, die sich bei der gemeinsamen Betrachtung auf dem Bildschirm ergeben, z. B. bei der Suche nach Mustern und Strukturen, wenn das Medium viele Beispiele liefert.

## Gemeinsam die eigene Medienkompetenz stärken

Egal, ob Sie Medien gezielt auswählen, Lernziele setzen, Lernpfade konzipieren oder Lernstände und Lernprozesse diagnostizieren – ein sinnvoller Einsatz digitaler Medien kann den Mathematikunterricht unterstützen und sollte mitgedacht werden. Ein gut gewähltes Medium kann bei einer sinnvollen Gestaltung von Aufgaben und Unterrichtsschritten im wahrsten Sinne des Wortes gut „vermitteln". Es geht um mehr, als „einfach das Medium einzusetzen". Der Anspruch an das Medium, die Denkhandlungen beim Lernen gezielt anzustoßen und zu unterstützen, dient als wichtigstes Kriterium, an dem sich jeglicher Medieneinsatz messen lassen muss (Barzel/Greefrath 2015).

Dazu gilt es, zusammen mit Kolleg:innen sich selbst immer wieder zu motivieren und zu stärken, auch Neues auszuprobieren. Das erfordert Zutrauen zu sich selbst für neue Routinen und Wege beim Lehren – was keineswegs selbstverständlich ist. Man weiß aus Studien, dass es vielen Lehrkräften so geht (Thurm 2019) – dieses Wissen kann Mut machen, im Kollegenkreis solche Unsicherheiten bewusst zu thematisieren, um gemeinsam ein neues Aufgabenformat mit neuen Medien zu wagen. Es gibt viele Möglichkeiten, wie Lernprozesse mit und durch Medien unterstützt werden können. Wir wünschen viel Erfolg beim Ausprobieren.

### Literatur


Barzel, B./Schreiber, C. (2017).: Digitale Medien im Unterricht. – In: Abshagen, M. u. a.(Hrsg.): Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten. Klett Kallmeyer. S. 200–215.

Barzel, B./Greefrath, G. (2015): Digitale Mathematikwerkzeuge sinnvoll integrieren. – In: Blum, W. u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II (S. 145–157). Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

Eickelmann B. u. a. (2018): Die Studie ICILS 2018 im Überblick – Zentrale Ergebnisse und Entwicklungsperspektiven (S.19). Waxmann

Fuglestad, A. B. (2006): Students' choice of tasks and tools in an ICT rich environment. – In: Bosch, M. (Hrsg.): Proceedings of CERME 4.

Greefrath, G./Oldenburg, R./Siller, H.-S./Ulm, V./Weigand, H.-G. (2024): Digitalisierung im Mathematikunterricht: Theorie und Praxis digitaler Medien in der Sekundarstufe I. Springer Spektrum.

Hillmayr, D./Ziernwald, L./Reinhold, F./Hofer, S. I., /Reiss, K. M. (2020): The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. – In: Computers & Education, 153, 103897. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897

KMK (Hrsg.) (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Wolters Kluwer.

KMK (2022), Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den ersten und Mittleren Schulabschluss (i.d. Fassung vom 23.06.2022). Berlin: KMK

Thurm, D. (2019): Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht integrieren. Springer Spektrum.

Thurm, D./Graewert, L. A. (2022): Digitale Mathematik-Lernplattformen in Deutschland. Springer Spektrum.


**Hinweis:** In diesem Beitrag werden digitale Angebote von Drittanbietern erwähnt. Es liegt in der Verantwortung der Lehrkraft, die geltenden Bestimmungen in Bundesländern und Schulen zu beachten.

# Napoleon, Bäckerprozent und vogelgerader Flug 2024

*„Ebenso wie Amerika nicht den Namen Kolumbus trägt, werden mathematische Ergebnisse fast nie mit den Namen ihrer Entdecker bezeichnet.“– so Vladimir Arnold einst bei einem Vortrag in Paris. Michael Berry habe dazu das* Arnold-Prinzip *formuliert: „Wenn eine Idee einen persönlichen Namen trägt, dann ist dieser Name nicht der Name des Entdeckers“, und er habe auch genüsslich angehängt, das* Arnold-Prinzip *sei auf sich selbst anwendbar.*
*Nicht von Napoleon ist das* Napoleon-Dreieck*, das die Mittelpunkte der drei gleichseitigen Dreiecke über den Seiten eines beliebigen Dreiecks als Eckpunkte hat: Es ist stets gleichseitig, immer. Die interessante Geschichte dahinter: Die Aussage erschien erstmals mit Beweis 1826 – also nach Napoleons Tod – in „The Ladies´ Diary“, einer britischen Frauenzeitschrift! Napoleon wurde sie erst Jahrzehnte später zugeschrieben, als man in Frankreich begann, ihn zu glorifizieren – auch durch mathematische Leistung! Wäre sowas auch bei uns denkbar? In Frankreich – und nicht nur dort – hat Mathematik einen ganz anderen Stellenwert als bei uns. Dort rühmt man sich mit mathematischem Können … und nicht mit Unwissen.*

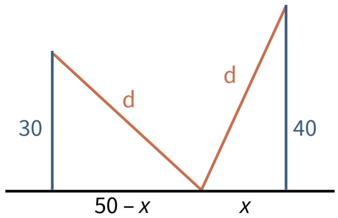



**Abb. 1**: Zeichnung zur Textaufgabe: Wo liegt die Quelle?

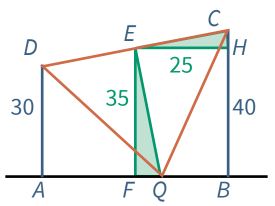



**Abb. 2**: Konstruktive Lösung zur Textaufgabe: Wo liegt die Quelle?

## Der geometrische Blick

Von Heinz Klaus Strick, seit Langem Autor bei *mathematik lehren*, gibt es zwei neue Bücher zum blätternden Schmökern. Wer direkt bei ihm bestellt – https://mathematik-ist-schoen.jimdo.com/ – bekommt auf Wunsch eine Widmung, und ein Viertel des Verkaufspreises geht stets an das Friedensdorf Oberhausen. Der besonders farbenprächtige Band „Kunterbunte Mathematik“ verspricht zu Recht „Begeisternde Erkundungen für Kinder, Lehrende und Eltern“, darunter übrigens auch die Ideen zum Dritteln einfacher Figuren aus *Die etwas andere Aufgabe* in *mathematik lehren* 226.

Seine „Geschichten aus der Mathematik“ geben einen spannenden Ein- und Überblick zur frühen Mathematik in Indien und China und zum späteren Wiedererwachen in Europa. Dort findet sich auch eine Aufgabe aus dem Buch *Liber Ab(b)aci* (1202) mit einer originellen Lösung von Leonardo von Pisa (bekannt als Hasen und ihre Nachkommen zählender Fibonacci):

→ ***Wo liegt die Quelle?***
*In einem Gelände stehen zwei Türme; sie sind 50 Fuß voneinander entfernt, der eine ist 30 Fuß, der andere 40 Fuß hoch. Zwei Vögel fliegen (gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit) jeweils von der Spitze der Türme hinab und kommen gleichzeitig an einer Quelle an, die zwischen den beiden Türmen liegt. Wie weit ist die Quelle von den beiden Türmen entfernt?*

Vermutlich würden wir – die unterrichtsvertraute schnurgerade Flugbahn brav akzeptierend – diese Aufgabe mit dem Satz von Pythagoras formal-algebraisch erfolgreich erschlagen, vgl. **Abb. 1**.

Für die beiden Flugstrecken $d$ gilt $d^2 = 30^2 + (50 - x)^2 = 40^2 + x^2$, woraus sich die Lösung $x = 18$ ergibt.
Leonardos konstruktiv-geometrische Lösung ist wesentlich origineller (vgl. **Abb. 2**): Er betrachtet die Mittelsenkrechte zu $CD$, diese schneidet die Strecke $AB$ im Punkt $Q$, der Quelle.

Die beiden grün gefärbten Dreiecke sind zueinander ähnlich, denn einander entsprechende Strecken stehen jeweils senkrecht aufeinander – deshalb ist $|FQ| : |EF| = |CH| : |EH|$, also $|FQ| : 35 = 5 : 25$, d. h. $|FQ| = 7$ und somit $|AQ| = 32$ und $|QB| = 18$.

Dass er durchaus auch den Satz des Pythagoras im Repertoire hat, zeigt Leonardo dann bei der Probe:
$|DQ|^2 = 30^2 + 32^2 = 900 + 1024 = 1924$ und
$|CQ|^2 = 40^2 + 18^2 = 1600 + 324 = 1924$.
Die Flugstrecken der beiden Vögel sind tatsächlich gleich lang.

## Fundstücke-Fragen

Wie viel ist das? Wie groß ist das? Können wir das jeweils gut schätzen – zumindest die Größenordnung? Das sind immer wieder wichtige Fragen. Deren Beantwortung braucht Erfahrung und Übung. Beispielsweise auch bei Geld … und Gold? Die jungen Leute sollen ja eine realistische Beziehung zu Geld … und Gold … aufbauen. Sagt man. Dafür kann dann auch mal eine ungewöhnliche Meldung in der Zeitung oder im WWW etwas beitragen, die dort abrufbar den Bezug zum Alltag ins Klassenzimmer tragen hilft.

**Goldfund beim Entrümpeln**
Goldbarren und Goldmünzen im Wert von mehr als 135 000 Euro hat ein Mann bei

einer Wohnungsentrümpelung gefunden. Er gab den Fund bei der Polizei ab. Noch ist unklar, wem der Schatz ursprünglich gehörte. Wenn es kein Diebesgut ist, kann sich der ehrliche Finder laut Polizei „auf einen stattlichen Finderlohn freuen“. Meldet sich nach sechs Monaten kein Besitzer, darf er den Schatz ganz behalten.

nach: SWR, s. https://fr-vlg.de/goldbarren, 11.4.2023

Fragen Sie doch einfach mal Ihre Klasse, wie groß dieser Haufen Gold ist – es ist wirklich spannend, was beim Schätzen herauskommt, etwa

→ *Passt der Fund in einen Lkw?*
→ *Oder sogar in einen Pkw?*
→ *Oder sogar in eine Schubkarre?*
→ *Oder sogar in die Schultasche?*
→ *Oder ist der Fund nur so groß wie eine Schokoladentafel?*
→ *Oder …?*

Übrigens: Derzeit ist 1 Kilo Gold etwa 60 000 € wert, und $38 \times 89 \times 17\,\text{mm}^3$ ist eine übliche Größe für einen 1-kg-Barren (https://www.scheideanstalt.de). Da genügt oben ein Spielzeug-LKW.

Und wenn schon mal so viel Goldwert im Raum steht – viel wichtiger, empathisch ernstnehmend: Was würden die Jugendlichen aus Ihrer Klasse jeweils mit 135 000 Euro tun?

## p-q-… als Einzeiler

Ob man die $p$-$q$-Formel unterrichten sollte oder ob das Verfahren der quadratischen Ergänzung die wahre Mathematik ist – das wollen wir hier nicht diskutieren. Sondern warum der Term ausgerechnet so aussieht:

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ja. Klar. Weil wir ihn so ausgerechnet haben. Wir haben das Ergebnis. Fertig. Aber könnte er nicht schöner aussehen, wenn wir weiter umformen? Zum Beispiel Brüche reduzierend wie hier:

$$\frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

… oder gar die Brüche versteckend?

$$\left(\pm \sqrt{p^2 - 4q} - p\right) : 2$$

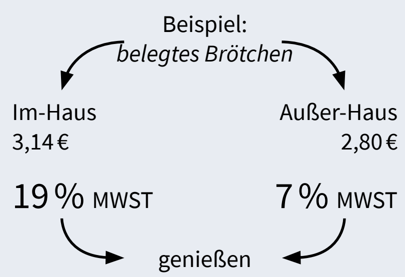
Es gibt Schülerinnen und Schüler, die die letzte Variante klar bevorzugen … wenn der Unterricht sie zur Verfügung stellt. Zugegeben: Das ist nun endgültig eine Formel zum Auswendiglernen … in der ersten Variante spiegelt sich noch die Idee der quadratischen Ergänzung wider. Doch wer sieht diese Spiegelung schon/noch :-(

## 2024 … hochprozentig

Das neue Jahr sorgte nicht nur für neue Vorsätze, sondern auch für eine Änderung beim deutschen Mehrwertsteuersatz: Jetzt gilt wieder der Satz von 19 % für Lebensmittel, die in Cafés und Gaststätten verzehrt werden, wo vorher der ermäßigte Satz von 7 % galt.

Doch Prozentrechnung fällt nicht jedem immer leicht.

**Warum haben wir jetzt Im-Haus & Außer-Haus Preise?**




Ab dem 1.1.2024 muss für den Verzehr im Café wieder eine Mehrwertsteuer von 19 % an das Finanzamt abgeführt werden.

Heinrich Hemme aus Aachen entdeckte ein fragliches Beispiel: Eine Bäckerei informierte mit Aufstellern über die Mehrwertsteuererhöhung. Die Beispielrechnung: Ein belegtes Brötchen kostet bei 7 % MwSt. 2,80 €. Bei 19 % MwSt. kostet es natürlich (!) 19 % – 7 % = 12 % mehr, also 2,80 € · 1,12 ≈ 3,14 €. Jedoch: Die 2,80 € sind eben nicht 100 %, sondern 107 %. 100 % sind also 2,80 € : 1,07 ≈ 2,62 €, mit 19 % MwSt. ergibt sich daraus 2,80 € : 1,07 · 1,19 ≈ 3,11 €, „kaufmännisch“ gerundet. Der Unterschied ist klein. Aber es gibt ihn – und wird beim Viel-Brötchen-Kauf irgendwann relevant.

## 2024 … nutz- und folgenlos

Godfrey Harold Hardy, einer der großen Zahlentheoretiker des vergangenen Jahrhunderts, war stolz darauf: „Ich habe nie etwas ‚Nützliches‘ gemacht. Keine Entdeckung von mir hat je oder wird wahrscheinlich je, direkt oder indirekt, zum Guten oder Bösen einen Unterschied zum Wohlergehen der Welt machen.“ Wie sich später herausstellte, irrte er sich dabei allerdings. – Wir hoffen, dass zumindest die folgenden Zahlenspielereien von Heinz Klaus Strick aus Leverkusen keine tiefgreifenden Folgen haben – außer für unser durch sie erweitertes Wissen über arithmetische Zusammenhänge:

179 + 180 + … + 184 + … + 189
= 77 + 78 + … + 88 + … + 99
= 119 + 120 + … + 133 + 134 = 2024

… und es gibt für 2024 nur diese drei Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen – denn 2024 = 23 · 11 · 23 hat nur drei ungerade Teiler …

Ebenfalls über die Primfaktorzerlegung von 2024 lässt sich mittels $(a^2 - b^2) = (a - b) \cdot (a + b)$ zeigen, dass es nur diese vier Darstellungen als Quadrate-Differenz gibt:

$507^2 - 505^2 = 255^2 - 251^2 =$
$= 57^2 - 35^2 = 45^2 - 1^2 = 2024$

Ebenso nutzlos dürften auch die interessanten Darstellungen im Dualsystem und im Dreier-System sein:

$2024 = (11111101000)_2$
$2024 = (2202222)_3$

… nicht zu vergessen die überaus bemerkenswerte Tatsache, dass all dies in Ausgabe 242 von *mathematik lehren* steht, welches Sie jetzt vielleicht ausgerechnet am 24. 2. in den Händen halten. Auf Seite $(100)_7 = (110001)_2$.

## Kluges unschwammig

*Nicht etwa, dass bei größerer Verbreitung des Einblickes in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt würde als heute, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.*

Karl Menger, Vater des Menger-Schwamms

(s. mathematik lehren 240, S. 27–23)

Haben Sie eine Idee für *Die etwas andere Aufgabe?* Oder auch ebenso gerne mal eine etwas andere Lösung? Schreiben Sie uns: die-etwas-andere-aufgabe@ friedrich-verlag.de

*Wilfried Herget* *Anselm Lambert*

Inhaltsverzeichnis



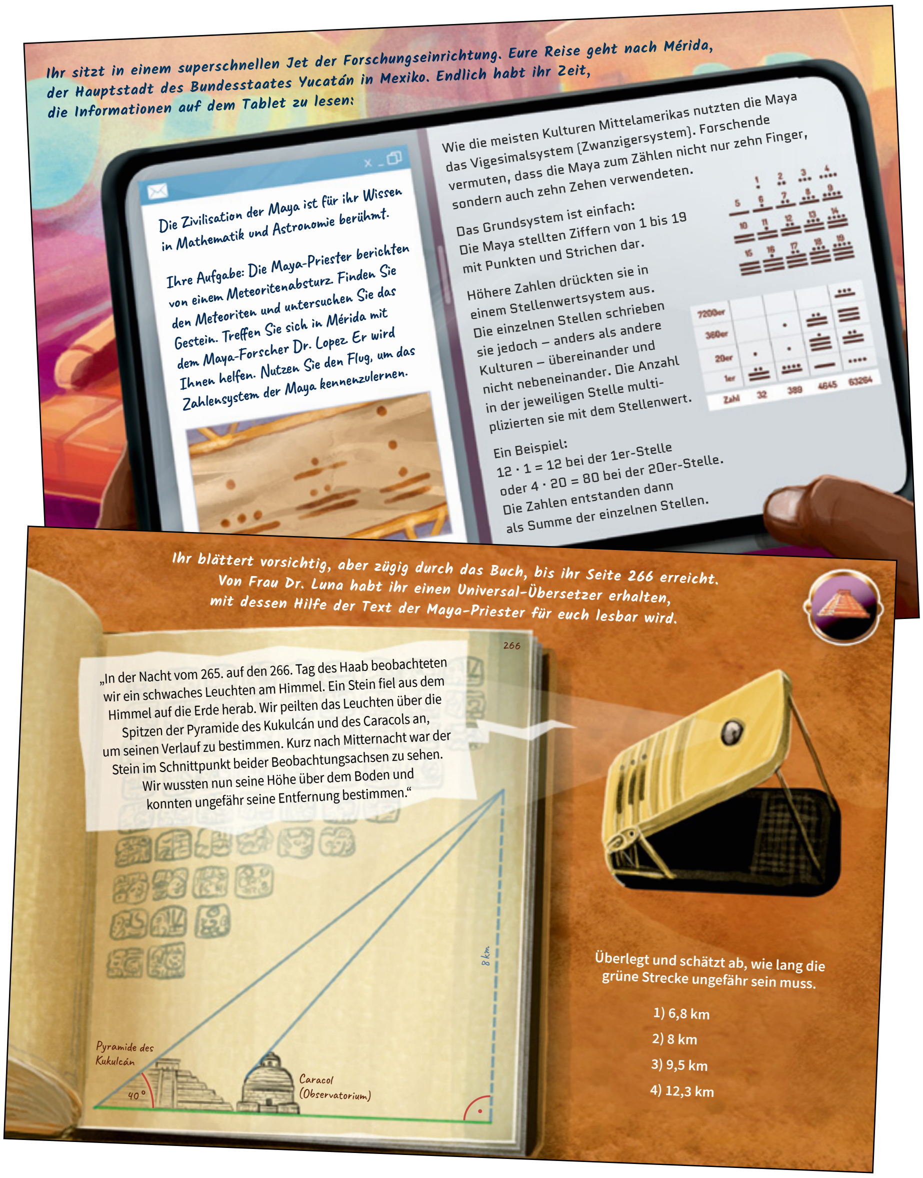
VALERIE LANGE

# Knobeln im Escape Game

Escape Games können den Mathematikunterricht bereichern: Der spielerische Ansatz und der Rätselcharakter, der oft mit Codes oder Zahlenkombinationen verbunden ist, aktiviert und motiviert Schüler:innen. Im Spiel können sie ihre mathematischen Fertigkeiten in kontextbezogenen, problemorientierten Szenarien anwenden.

Für Schüler:innen ist ein Escape Game vor allem dann motivierend, wenn die Lösung der Rätsel in eine spannende (aber keine allzu gruselig-erschreckende) Erzählung eingebettet ist und sie sich so aufmachen, gemeinsam ein Abenteuer zu bestehen.

→ *Versetzen Sie sich in die 6. bis 8. Klasse und versuchen Sie sich einmal an den beiden zwei Rätseln in* **Abb. 1.**




Die Rätsel nehmen die Unterrichtsinhalte Addition von Brüchen, Prozentumwandlung, Dezimalzahlen und gemeine Brüche und Winkelarten spielerisch auf. Neben fachlichem Wissen üben die Schüler:innen Logik, Abstraktionsfähigkeit und Kreativität. So gestaltet, eignet sich ein Escape Game zur Wiederholung und Überprüfung von Lerninhalten.

Einzelne Rätsel eignen sich, um das Format im Unterricht zu testen, etwa als Warm-up oder zum Ende einer Unterrichtseinheit. Die Schüler:innen können die Rätsel in Partner- oder Gruppenarbeit lösen. Im Anschluss können sie eigene Rätsel konstruieren, die andere Gruppen lösen können (vgl. mathematik lehren 237, S. 50 – 51).

## 45 Minuten Escape – X/371: Gefahr aus dem All

Zu Beginn des Spiels schlüpfen die Schüler:innen in neue Rollen: Sie werden zu Mitgliedern der Taskforce9 mit der Aufgabe, einen Asteroideneinschlag auf der Erde zu verhindern. In fünf Gruppen aufgeteilt sammeln sie Daten (d. h. Lösungen der Rätsel), die ihnen helfen, dieses Ziel zu erreichen. Das gelingt, wenn sie am Ende des Spiels das Abschlussrätsel in gemeinsamer Anstrengung lösen können. (Zum Spiel: https://fr-vlg.de/escape-13128)

**Hilfen**

**Tipp 1:** Interessant für die Lösung ist nur das große, äußere, rechtwinklige Dreieck. Wie groß ist hier der fehlende Winkel?

**Tipp 2:** Ihr wisst: Gegenüber von einem größeren Winkel liegt auch eine längere Seite. Wenn dem Winkel 40° die Strecke 8 km gegenüber liegt, dann liegt gegenüber von 50° (nicht viel größer als 40°) etwa eine Strecke von …?"

**Lösung:** 9,5 km

**Tipp 1:** Erste Zahl: 1 · 20 (obere Reihe) + 8 · 1 (untere Reihe) = 28

**Zweite Zahl:** 6 · 20 (obere Reihe) + 12 · 1 (untere Reihe) = 132

**Dritte Zahl:** 1 · 360 (obere Reihe) + 1 · 20 (mittlere Reihe) + 11 · 1 (untere Reihe) = 391

**Lösung:** 551

# IMPRESSUM

**mathematik lehren**
**Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien**
wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Hannover in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Bärbel Barzel, Johanna Heitzer, Lars Holzäpfel, Anselm Lambert, Jürgen Roth, Benjamin Rott, Marie-Christine von der Bank und Rudolf vom Hofe.
Ständige Mitarbeit: Tim Lutz, Wilfried Herget

**Redaktion**
Anne Hilgers (v. i. S. d. P.)
Luisenstr. 9, 30159 Hannover
Tel.: 0511 40004-142
E-Mail: redaktion.ml@friedrich-verlag.de
www.mathematik-lehren.de

**Verlag**
Friedrich Verlag GmbH
Luisenstr. 9, 30159 Hannover
www.friedrich-verlag.de

**Geschäftsführung**
Julia Reinking

**Verlagsleitung**
Tim Schönemann

**Programmleitung**
Kai Müller-Weuthen

**Verantwortung für den Anzeigenteil**
(V. i. S. d. P.)
Bianca Schwabe
Adresse s. Verlag
Tel. 0511-40004-123
schwabe@friedrich-verlag.de

Anzeigenpreisliste, gültig ab 01.01.2024

**Leserservice**
Tel.: 0511 40004-150 / Fax: 0511 40004-170
E-Mail: leserservice@friedrich-verlag.de

**Titel**
Gestaltung: Christian Schulte, Friedrich Verlag
Logos: © DZLM

**Druck**
Zimmermann Druck + Verlag GmbH, Widukindplatz 2, 58802 Balve

Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Kundennummer (siehe Rechnung). *mathematik lehren* ist zu beziehen durch den Buch- und Zeitschriftenhandel oder direkt vom Verlag. Ausland auf Anfrage. Bei Nichtlieferung infolge höherer Gewalt oder Störungen des Arbeitsfriedens bestehen keine Ansprüche gegen den Verlag.



**ISSN 0175-2235** **Bestell-Nr. 58242**



# DIE AUTORINNEN UND AUTOREN

Claudia Ademmer
Abgeordnete Lehrerin am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der TU Dortmund

Bärbel Barzel
Professorin für Didaktik der Mathematik an der Universität Duisburg-Essen

Florian Bastkowski
Gymnasiallehrer, derzeit abgeordneter Studienrat an der Universität Duisburg-Essen

Bianca Fink
Mathematische Mitarbeiterin am Institut für mathematische Bildung der PH Freiburg

Oliver Girnth
Lehrer am Gymnasium Waldstraße in Hattingen

Gilbert Greefrath
Professor für Mathematikdidaktik mit Schwerpunkt Sekundarstufen an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Wilfried Herget
em. Professor für Didaktik der Mathematik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Max Hoffmann
Akademischer Rat an der Universität Paderborn

Lars Holzäpfel
Professor für Didaktik der Mathematik am IMBF der Pädagogischen Hochschule Freiburg, er gehört zum QuaMath-Leitungsteam

Anselm Lambert
Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität des Saarlandes

Mareike Nagel
Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik der Universität Münster

Eva Peitz
Lehrerin an der Richard-von-Weizsäcker-Gesamtschule Rietberg

Susanne Prediger
Professorin für Mathematikdidaktik und Transferforschung. Leiterin des QuaMath-Projekts und des Deutschen Zentrums für Lehrkräftebildung Mathematik am IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Andreas Rieu
Akademischer Rat am Institut für Mathematische Bildung der PH Freiburg

Bettina Rösken-Winter
Professorin für Mathematik in der Primarstufe an der Humboldt-Universität zu Berlin, sie gehört zum QuaMath-Leitungsteam und ist stellvertretende Leiterin des DZLM-Netzwerks

Florian Schacht
Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Duisburg-Essen

Paul Tyrichter
war mehrere Jahre Mathematiklehrer an einem Gymnasium, zurzeit promoviert und lehrt an der Universität Duisburg-Essen

Oliver Wagener
Lehrer am Marie-Curie-Gymnasium Neuss mit den Fächern Mathematik, Physik und Informatik

Maya Zastrow
Akademische Mitarbeiterin am IMBF, Pädagogische Hochschule Freiburg

# VORSCHAU

**Enaktiv-experimentelle Zugänge**
Hrsg.: Michael Kleine, Rudolf vom Hofe

**KI im Mathematikunterricht**
Hrsg.: Rolf Biehler, Sarah Schönbrodt

**Begabungen fördern**
Hrsg.: Ralf Benölken, Timo Dexel

**Digitale Lernumgebungen**
Hrsg.: Katrin Klingbeil, Daniel Thurm

# RÜCKSCHAU

**ml 241** **Geometrisch konstruieren**

**ml 240** **Gute Lernatmosphäre schaffen**

**ml 239** **Numerische Mathematik**

**ml 238** **Methoden passend einsetzen**

**ml 237** **Mathe macht MINT**

**ml 236** **Grundvorstellungen unterrichten**

**ml 235** **Wettbewerbe**

**Arbeiten Sie mit!**
Möchten Sie die Zeitschrift mitgestalten und haben Sie eine interessante Unterrichtseinheit entwickelt und erprobt? Oder ein Spiel, eine besondere Aufgabenidee, eine gute App usw. für unser Magazin (insbes. **Ideenkiste** oder **Die etwas andere Aufgabe**)? Schreiben Sie uns, wir freuen uns!

*Bitte senden Sie Ihre Vorschläge an:*
Redaktion mathematik lehren
Friedrich Verlag
Luisenstraße 9, 30159 Hannover
redaktion.ml@friedrich-verlag.de