Mathe ab 11 Jahren

ANDREAS KOEPSELL

DIE WAHRSCHEINLICHKEITS BOX

SEKUNDARSTUFE

Zufallsversuche durchführen, auswerten, erklären

- Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Klassen 5–10
- Übungsmaterial, Aufgaben- und Hilfekarten – sofort einsetzbar
- Die ideale Ergänzung zum Schulbuch

Kallmeyer LERNSPIELE

Impressum

Andreas Koepsell

5. Auflage 2022
Die Wahrscheinlichkeitsbox Sekundarstufe
Zufallsversuche durchführen, auswerten, erklären

Friedrich Verlag GmbH
Luisenstraße 9, 30159 Hannover

Redaktion: Andrea Baulig, Kerstin Bembom
Titel und Layout: Dirk Jäger
Realisation: Gudrun Leszinski
Druck: LUDO FACT GmbH
Printed in Germany

Bestell-Nr.: 13363

www.kallmeyer-lernspiele.de

Inhalt

Das Material

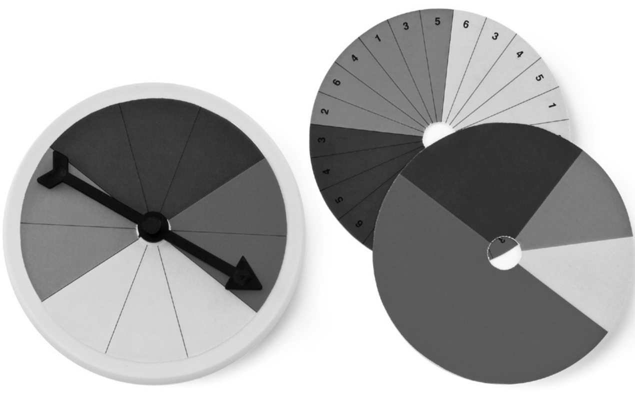
Die Wahrscheinlichkeitsbox enthält umfangreiches Material zum Durchführen von Zufallsversuchen:
– Kreis-Untersatz mit austauschbaren Farbscheiben und drehbarem Zeiger
– verschiedene „Würfel“
– Urnenmodelle
– Zufallsgeräte, deren Ergebnisse nicht alle gleich wahrscheinlich sind.

Zu jeder der vier Materialgruppen existieren Aufgabenkarten. Sie leiten einerseits die Verwendung des Materials an; andererseits werden aus dem Sinnkontext Aufgaben gestellt, die mit grundlegenden Begriffen und Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösbar sind.

Im Idealfall wird also mit dem Material ein Zufallsexperiment durchgeführt, das durchgeführte Experiment wird statistisch ausgewertet und im Anschluss wird das Experiment mit den systematischen Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert.

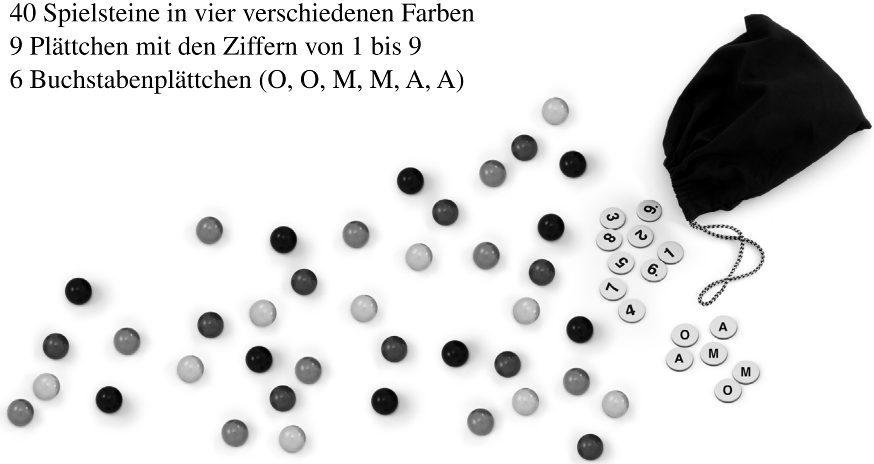
Die Materialien im Einzelnen:

12 Aufgabenkarten „Farbscheiben“:
- Kreis-Untersatz
- Drehzeiger
- 3 Farbscheiben



12 Aufgabenkarten „Würfel“:
- Würfel im Würfel
- Farbwürfel
- Oktaeder-Würfel
- Dodekaeder-Würfel
- Tetraeder-Würfel
- Zehnerwürfel mit den Ziffern von 0 bis 9
- Zehnerwürfel mit den Zehnerzahlen von 00 bis 90
- Blankowürfel mit den Buchstaben A, A, A, N, N, N
- Blankowürfel mit den Buchstaben O, O, M, M, A, A

10 Aufgabenkarten „Baumwollbeutel“:
- Baumwollbeutel
- 40 Spielsteine in vier verschiedenen Farben
- 9 Plättchen mit den Ziffern von 1 bis 9
- 6 Buchstabenplättchen (O, O, M, M, A, A)



8 Aufgabenkarten „Unregelmäßige Zufallsgeräte“:

- 3 unterschiedliche Körper mit aufgedruckter Augenzahl, die nicht alle mit derselben Wahrscheinlichkeit fallen

Zusätzlich werden sechs Hilfekarten angeboten. Auf diesen Karten sind das benötigte Wissen und die benötigten Verfahren zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammengefasst. Schülerinnen und Schüler, die mit der Wahrscheinlichkeitsbox arbeiten, können sich hier informieren und finden in knapper Form alle benötigten Grundlagen.

Auf den Aufgabenkarten wird auf die Hilfekarten verwiesen.

Anmerkung: Im Themenkomplex „Würfel“ und im Themenkomplex „Unregelmäßige Zufallsgeräte“ werden Zufallsgeräte eingesetzt, die wie Spielwürfel funktionieren, die aber vom geometrischen Standpunkt keineswegs Würfel sind (z. B. ein Oktaeder oder ein Tetraeder). Um das Aufgabenverständnis nicht zu erschweren, werden die Zufallsgeräte trotzdem gelegentlich als Würfel bezeichnet. Für Schülerinnen und Schüler stellt dies in der Regel keine Schwierigkeit dar, die Problematik sollte ihnen aber bewusst gemacht werden.

Was lernen die Schülerinnen und Schüler mit der Wahrscheinlichkeitsbox?

Mit den Aufgabenkarten der Wahrscheinlichkeitsbox werden die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen gefördert, die für den mittleren Schulabschluss relevant sind:

Schülerinnen und Schüler

- werten Zufallsexperimente durch Tabellen und Strichlisten aus
- ermitteln absolute und relative Häufigkeiten
- ermitteln Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen von Laplace-Zufallsexperimenten
- ermitteln relative Häufigkeiten von Nicht-Laplace-Zufallsexperimenten
- schließen aufgrund von Häufigkeitstabellen auf Zufallsgeräte
- vergleichen und bewerten Ergebnisse von Zufallsversuchen
- stellen einstufige und mehrstufige Zufallsversuche mit Baumdiagrammen dar und werten diese aus
- ermitteln Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen durch verkürzte Baumdiagramme.

Die Wahrscheinlichkeitsbox stellt eine experimentelle Lernumgebung dar, die in allen Schulformen ergänzend zum Schulbuch eingesetzt werden kann. Sie bietet ausreichende Übungsmöglichkeiten für alle Teilkompetenzen. Die Karten werden schwerpunktmäßig in Klasse 7/8 eingesetzt, zur Wiederholung auch in Klasse 10. Für die Bearbeitung der Inhalte in der Jahrgangsstufe 5/6 sind die Karten mit dem einfachsten Schwierigkeitsgrad (ein Stern) geeignet.

Die Unterschiede zwischen den einzelnen Schulformen bestehen bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Wesentlichen in der Komplexität der Aufgaben. In der Hauptschule wird man sich in einigen Bereichen auf zweistufige Zufallsversuche beschränken (statt mehrstufige Zufallsversuche).

Die Aufgabenstellungen der Wahrscheinlichkeitsbox fördern auch prozessbezogene Kompetenzen. Dies gilt insbesondere für die Kompetenzen „Kommunizieren“, „Argumentieren“ und „Modellieren“.

Es wird erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler aus dem Unterricht grundlegende Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzen. Das hier angebotene Material ist dann in erster Linie Übungsmaterial. Wenn Schülerinnen und Schüler selbstständig mit dem eingeführten Schulbuch umgehen können und auch die Hilfekarten sinnvoll einsetzen, so eignet sich die Wahrscheinlichkeitsbox auch zur eigenständigen Erarbeitung von Inhalten.

Wie kann das Material verwendet werden?

Die Wahrscheinlichkeitsbox kann sowohl im Unterricht als auch parallel zum Unterricht von Schülerinnen und Schülern benutzt werden. Die Bearbeitung der Karten ist bis auf wenige Ausnahmen (Spielfelder) auch in Einzelarbeit möglich.

Mit den Karten erhalten die Schülerinnen und Schüler umfangreiche Übungen zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung und sind dadurch für diesen Inhaltsbereich für alle Formen von Leistungskontrollen gut gerüstet.

Im Unterricht ist es sinnvoll, die Klasse in vier Gruppen aufzuteilen. Jede Gruppe erhält die Karten einer Farbe und das dazugehörige Material (s. S. 4 – 6). Nach einer angemessenen Bearbeitungszeit werden Materialien und Aufgabenkarten ausgetauscht.

Die Schwierigkeitsstufen der einzelnen Aufgabenkarten sind durch Sterne gekennzeichnet. Die mit einem Stern markierten Karten sind als Einstiegsaufgaben gut geeignet. Diese einfacheren Aufgaben kommen überwiegend in dem Themenkomplex „Farbscheiben“ vor.

Die vollständige Bearbeitung aller Aufgabenkarten durch einen Schüler oder eine Schülerin erfordert viel Zeit. Dies ist nicht für alle Schülerinnen und Schüler empfehlenswert. Oft reicht es, aus den verschiedenen Themenfeldern so viele Aufgaben zu bearbeiten, dass der Schüler oder die Schülerin die Aufgabentypen sicher lösen können.

Eine wichtige Funktion haben die sechs Hilfekarten. Auf diesen Karten werden die behandelten mathematischen Inhalte kurz dargestellt. Sie dienen den Schülerinnen und Schülern als Erinnerungsstütze und zur Wiederholung.

Dokumentation von Schülerlösungen

Auch bei Gruppenarbeit sollte von jeder Schülerin und jedem Schüler eine schriftliche Dokumentation der Arbeitsergebnisse verlangt werden. Nur so kann sichergestellt werden, dass die Darstellungsweisen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Baumdiagramme, verkürzte Baumdiagramme) von allen Schülerinnen und Schülern wirklich erlernt werden.

Viele Karteikarten enthalten Fragen, die eine begründete Antwort erfordern. Auch diese Antworten sollen von Schülerinnen und Schülern schriftlich formuliert werden. Dies schult die prozessbezogenen Kompetenzen „Argumentieren“ und „Kommunizieren.

Das Anfertigen von Baumdiagrammen ist für Schülerinnen und Schüler oft schwierig, da sich erst während der Bearbeitung herausstellt, wie groß ein Baumdiagramm wird. Daher werden die von Schülerinnen und Schülern erstellten Baumdiagramme oft unübersichtlich und die Ergebnisse der Lernenden sind nur schwer zu interpretieren. Einfacher ist es, ein zweistufiges Baumdiagramm von den Ergebnissen aus zu entwickeln. Dies setzt aber voraus, dass ein Schüler oder eine Schülerin die Struktur dieses Baumdiagramms gedanklich im Kopf entfalten kann.

Um diese Schwierigkeit ein wenig aufzufangen, werden auf den hinteren Seiten dieses Begleithefts Kopiervorlagen für halbfertige Baumdiagramme angeboten, die beim Kopieren auf DIN-A4-Format vergrößert und von den Schülerinnen und Schülern geeignet vervollständigt werden können. Dadurch wird allerdings den Schülerinnen und Schülern das gedankliche Strukturieren der Baumdiagramme abgenommen. Die Hilfe durch die Kopiervorlagen sollte deshalb nur gelegentlich in Anspruch genommen werden.

Übersicht über die Aufgabenkarten

Auf den Seiten 10–13 wird eine Übersicht der Karten angeboten, die für jede Schülerin und jeden Schüler kopiert und als Lernkontrolle benutzt werden kann. Die Schülerinnen und Schüler tragen auf ihrem Bogen das Datum der Bearbeitung ein.

1

Themenkomplex „Farbscheiben“

Karte	Thema		Datum
1	Ein Zufallsexperiment durchführen	★	
2	Ein Zufallsexperiment durchführen	★	
3	Ein Zufallsexperiment durchführen	★	
4	Einem Zufallsexperiment eine Farbverteilung zuordnen	★★	
5	Einem Zufallsexperiment eine Farbverteilung zuordnen	★★	
6	Einem Zufallsexperiment eine Farbverteilung zuordnen	★★	
7	Aussagen über Farbverteilungen machen	★★	
8	Aussagen über Farbverteilungen machen	★★	
9	Einfache Baumdiagramme zeichnen	★	
10	Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen	★★	
11	Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen	★★	
12	Wahrscheinlichkeiten bestimmen	★	

Themenkomplex „Würfel“

Karte	Thema		Datum
1	Ein Zufallsexperiment durchführen	★	
2	Zwei Zufallsexperimente vergleichen	★	
3	Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen	★★	
4	Ein zweistufiges Baumdiagramm zeichnen	★★	
5	Gewinnchancen ermitteln	★★	
6	Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen	★★	
7	Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen	★★★	
8	Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen	★★★	
9	Wahrscheinlichkeiten bestimmen	★★	
10	Einen vorgegebenen Gewinnplan umsetzen	★★	
11	Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen	★★★	
12	Wahrscheinlichkeiten bestimmen	★★	

KOPIERVORLAGE

3

Themenkomplex „Baumwollbeutel“

Karte	Thema		Datum
1	Ein Zufallsexperiment durchführen	★	
2	Ein Zufallsexperiment durchführen	★	
3	Zweimal ziehen – ohne Zurücklegen	★★	
4	Zweimal ziehen – mit Zurücklegen	★★	
5	Wahrscheinlichkeiten bestimmen	★★	
6	Aussagen über Farbverteilungen machen	★★	
7	Aussagen über Farbverteilungen machen	★★	
8	Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen	★★★	
9	Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen	★★★	
10	Einen vorgegebenen Gewinnplan umsetzen	★★★	

Themenkomplex „Unregelmäßige Zufallsgeräte"

Karte	Thema		Datum
1	Wahrscheinlichkeiten vermuten	★★	
2	Wahrscheinlichkeiten vermuten	★★	
3	Wahrscheinlichkeiten vermuten	★★	
4	Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen	★★	
5	Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen	★★	
6	Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen	★★	
7	Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen	★★★	
8	Gewinnchancen ermitteln	★★★	

Kommentare und Lösungen

Die hier angegebenen Lösungen sind Lösungsbeispiele. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, Zufallsexperimente zu protokollieren und Wahrscheinlichkeiten darzustellen (Angabe als Brüche, als Dezimalzahlen oder in Prozent). Diese sind von dem Unterrichtsverlauf, dem eingeführten Schulbuch und dem Erfindungsreichtum der Schülerinnen und Schüler abhängig. Die Lösungshinweise sind daher nicht als Einschränkung zu sehen. Gleichwertige Lösungen sind zulässig.

Wir haben in den Lösungen die Wahrscheinlichkeiten als Brüche und in Prozent angegeben. In der Regel ist die Verwendung von Brüchen als Pfadwahrscheinlichkeit in mehrstufigen Zufallsexperimenten sinnvoll. Die weitere mathematische Verarbeitung ist dann besonders einfach. Am Ende eines Pfades haben wir für die Wahrscheinlichkeiten oft die ungekürzten Brüche stehen lassen. So kann man aus dem Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die aus mehreren Ergebnissen zusammengesetzt sind, leichter ablesen. Die Addition der Brüche ist wegen des gleichen Nenners oft ohne Erweiterung möglich. Prozentangaben sind in der Regel ungenau. Wir haben meistens auf eine Stelle hinter dem Komma gerundet. Prozente erleichtern aber den Vergleich von Wahrscheinlichkeitsangaben.

Farbscheiben:

1. Ein Zufallsexperiment durchführen

b Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der geometrischen Struktur der Farbscheibe:

Rot: 50 %	Blau: 25 %
Grün: 12,5 %	Gelb: 12,5 %.

c Die relativen Häufigkeiten werden durch ein Zufallsexperiment ermittelt. Hier spielt der Zufall eine Rolle und es ergeben sich in der Regel nicht die Wahrscheinlichkeitswerte. Die Wahrscheinlichkeit ist hingegen lediglich ein theoretischer Wert, mit dem ein Ergebnis eintritt. Die Begründung sollte sich auf die eigenen, berechneten relativen Häufigkeiten beziehen.

2. Ein Zufallsexperiment durchführen

b Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der geometrischen Struktur der Farbscheibe:
Rot: 25 % Blau: 25 %
Grün: 25 % Gelb: 25 %.

c Vgl. Karte 1 c.

3. Ein Zufallsexperiment durchführen

b Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der geometrischen Struktur der Farbscheibe:
Rot: 20 % Blau: 30 %
Grün: 20 % Gelb: 30 %.

c Vgl. Karte 1 c.

4. Einem Zufallsexperiment eine Farbverteilung zuordnen

a

Rot	Blau	Grün	Gelb
32	30	28	30
26,7 %	25 %	23,3 %	25 %

b Da alle Farben ungefähr gleich häufig auftraten, wurde das Zufallsexperiment vermutlich mit der Farbscheibe III. durchgeführt.

5. Einem Zufallsexperiment eine Farbverteilung zuordnen

a

Rot	Blau	Grün	Gelb
48	72	46	74
20 %	30 %	19,2 %	30,8 %

b Die berechneten relativen Häufigkeiten entsprechen am ehesten der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Scheibe I (vgl. Karte 3).

6. Einem Zufallsexperiment eine Farbverteilung zuordnen

a

Rot	Blau	Grün	Gelb
68	33	17	14
51,5 %	25 %	12,9 %	10,6 %

b Die berechneten relativen Häufigkeiten entsprechen am ehesten der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Scheibe II (vgl. Karte 1).

Farbscheiben:

7. Aussagen über Farbverteilungen machen

a

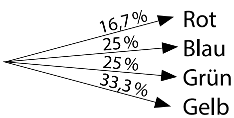
Rot	Blau	Grün	Gelb
44	61	62	85
17,5 %	24,2 %	24,6 %	33,7 %

b Gelb erscheint etwa doppelt so oft wie Rot. Blau und Grün erscheinen etwa gleich oft. Die Häufigkeit von „Rot oder Gelb“ ist ungefähr genauso groß wie die Häufigkeit von „Blau oder Grün“. Da der Kreis eine Einteilung in Zwölftel vorgibt, sind folgende Anteile anzunehmen:

Rot	Blau	Grün	Gelb
$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$
16,7 %	25 %	25 %	33,3 %

Dies ist nur eine Vermutung. Die Farbverteilung kann auch ganz anders aussehen.

c



8. Aussagen über Farbverteilungen machen

a

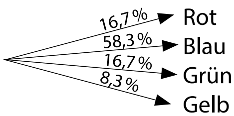
Rot	**Blau**	**Grün**	**Gelb**
20	71	20	9
16,7 %	59,2 %	16,7 %	7,5 %

b Rot und Grün erscheinen etwa gleich oft und jeweils doppelt so oft wie Gelb. Etwas mehr als die Hälfte der Scheibe ist wahrscheinlich blau. Da der Kreis eine Einteilung in Zwölftel vorgibt, sind folgende Anteile anzunehmen:

Rot	**Blau**	**Grün**	**Gelb**
$\frac{2}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
16,7 %	58,3 %	16,7 %	8,3 %

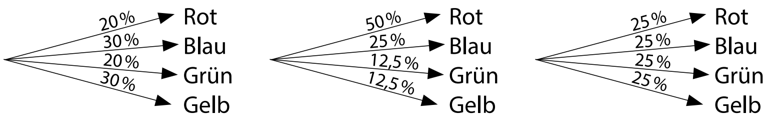
Dies ist nur eine Vermutung. Die Farbverteilung kann auch ganz anders aussehen.

c



9. Einfache Baumdiagramme zeichnen

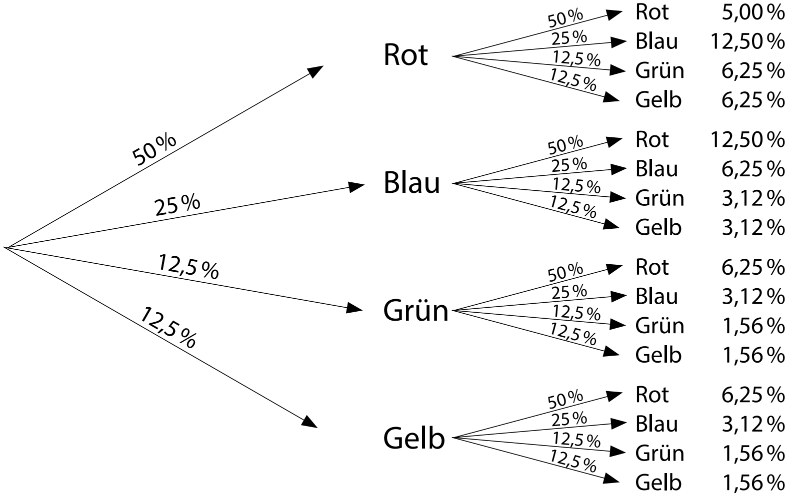
a



b Die Wahrscheinlichkeit für Rot ist mit Scheibe II besonders groß.
Die Wahrscheinlichkeit für Gelb ist mit Scheibe II besonders klein.
Die Wahrscheinlichkeit für Blau beträgt sowohl bei Scheibe II als auch bei Scheibe III 25 Prozent.

10. Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen

c

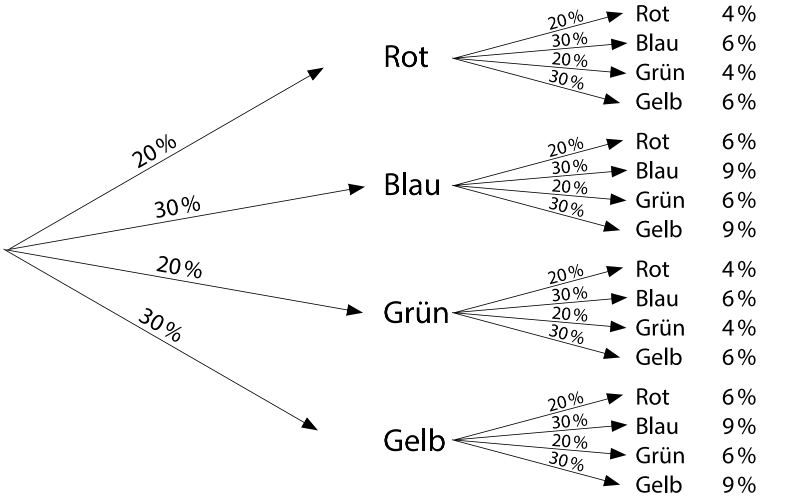


d Die Wahrscheinlichkeit für Rot/Rot beträgt 25 Prozent.

e Die Wahrscheinlichkeit für Gelb/Gelb beträgt 1,56 Prozent.

11. Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen

c



d Die Wahrscheinlichkeit für Rot/Rot beträgt 4 Prozent.
e Die Wahrscheinlichkeit für Gelb/Gelb beträgt 9 Prozent.

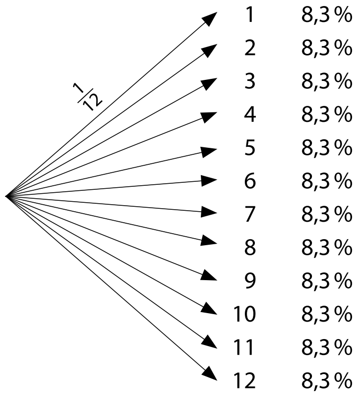
12. Wahrscheinlichkeiten bestimmen
b Die Wahrscheinlichkeit für Grün beträgt 25 Prozent $\left(\frac{1}{4}\right)$.
c Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs beträgt 16,7 Prozent $\left(\frac{1}{6}\right)$.
d Die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Drei beträgt 4,17 Prozent $\left(\frac{1}{24}\right)$.
e Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignisfeld, in ein freies Zielfeld zu springen, wenn alle Zielfelder noch frei sind, beträgt 16,7 Prozent $\left(\frac{4}{24}\right)$.

Würfel:

1. Ein Zufallsexperiment durchführen

b Die relativen Häufigkeiten sollten in der Nähe des Wertes 0,083 (8,3 Prozent oder $\frac{1}{12}$) liegen.

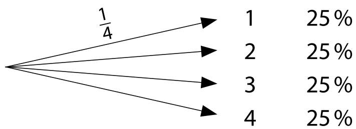
c



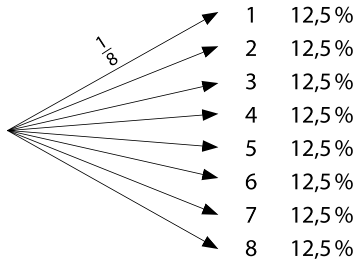
2. Zwei Zufallsexperimente vergleichen

a Beim Tetraeder gilt die Zahl als gewürfelt, die in der Spitze steht.

b



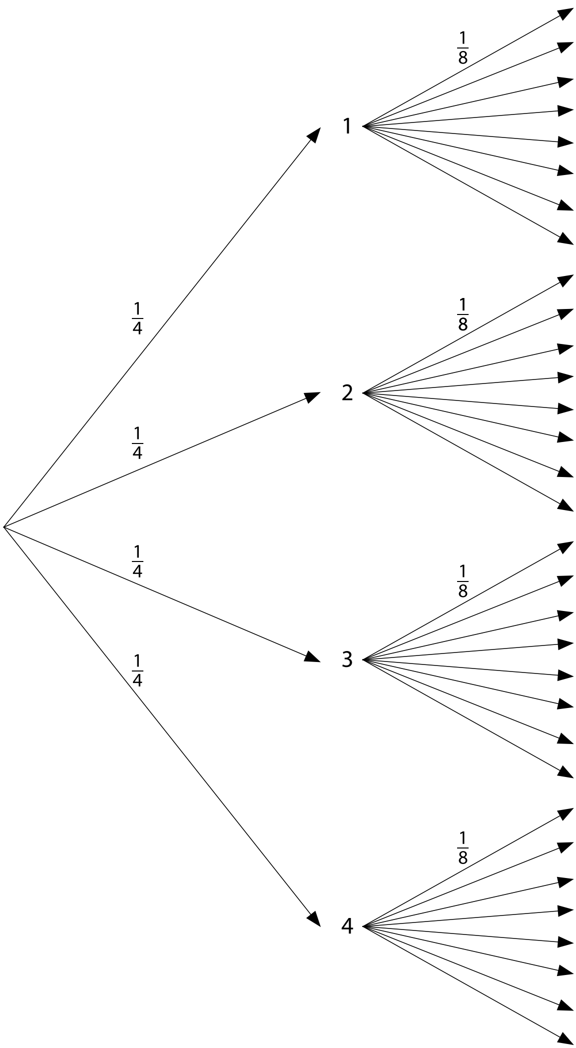
d



e Die Wahrscheinlichkeit ist beim Tetraeder-Würfel doppelt so groß, da es nur vier (statt acht) mögliche Ergebnisse gibt.

3. Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen

b



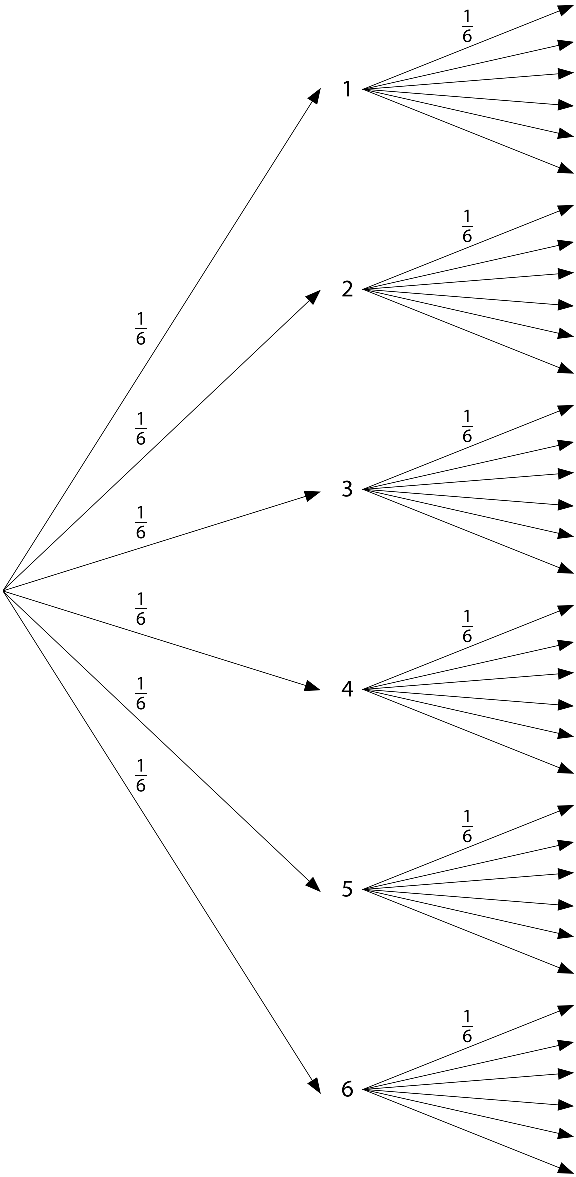
1	(1;1) = 2	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$
2	(1;2) = 3	
3	(1;3) = 4	
4	(1;4) = 5	
5	(1;5) = 6	
6	(1;6) = 7	
7	(1;7) = 8	
8	(1;8) = 9	
1	(2;1) = 3	
2	(2;2) = 4	
3	(2;3) = 5	
4	(2;4) = 6	
5	(2;5) = 7	
6	(2;6) = 8	
7	(2;7) = 9	
8	(2;8) = 10	
1	(3;1) = 4	
2	(3;2) = 5	
3	(3;3) = 6	
4	(3;4) = 7	
5	(3;5) = 8	
6	(3;6) = 9	
7	(3;7) = 10	
8	(3;8) = 11	
1	(4;1) = 5	
2	(4;2) = 6	
3	(4;3) = 7	
4	(4;4) = 8	
5	(4;5) = 9	
6	(4;6) = 10	
7	(4;7) = 11	
8	(4;8) = 12	

Alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{32}$.

Augen-summe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrschein-lichkeit	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$

4. Ein zweistufiges Baumdiagramm zeichnen

b



1	(1;1) = 2	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
2	(1;2) = 3	
3	(1;3) = 4	
4	(1;4) = 5	
5	(1;5) = 6	
6	(1;6) = 7	
1	(2;1) = 3	
2	(2;2) = 4	
3	(2;3) = 5	
4	(2;4) = 6	
5	(2;5) = 7	
6	(2;6) = 8	
1	(3;1) = 4	
2	(3;2) = 5	
3	(3;3) = 6	
4	(3;4) = 7	
5	(3;5) = 8	
6	(3;6) = 9	
1	(4;1) = 5	
2	(4;2) = 6	
3	(4;3) = 7	
4	(4;4) = 8	
5	(4;5) = 9	
6	(4;6) = 10	
1	(5;1) = 6	
2	(5;2) = 7	
3	(5;3) = 8	
4	(5;4) = 9	
5	(5;5) = 10	
6	(5;6) = 11	
1	(6;1) = 7	
2	(6;2) = 8	
3	(6;3) = 9	
4	(6;4) = 10	
5	(6;5) = 11	
6	(6;6) = 12	

Alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$.

c

					(1;6)					
				(1;5)	(6;1)	(2;6)				
			(1;4)	(5;1)	(2;5)	(6;2)	(3;6)			
		(1;3)	(4;1)	(2;4)	(5;2)	(3;5)	(6;3)	(4;6)		
	(1;2)	(3;1)	(2;3)	(4;2)	(3;4)	(5;3)	(4;5)	(6;4)	(5;6)	
(1;1)	(2;1)	(2;2)	(3;2)	(3;3)	(4;3)	(4;4)	(5;4)	(5;5)	(6;5)	(6;6)
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

d Die Augensumme 7 ist am wahrscheinlichsten, denn es gibt sechs mögliche Würfelkombinationen für die Augensumme 7. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

5. Gewinnchancen ermitteln

a Tetraeder und Würfel:

			Z	Z	Z	Z	Z			
		Z						Z		
	Z								Z	
Z										Z
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Zwei Würfel:

					Z					
				Z		Z				
			Z				Z			
		Z						Z		
	Z								Z	
Z										Z
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Dodekaeder:

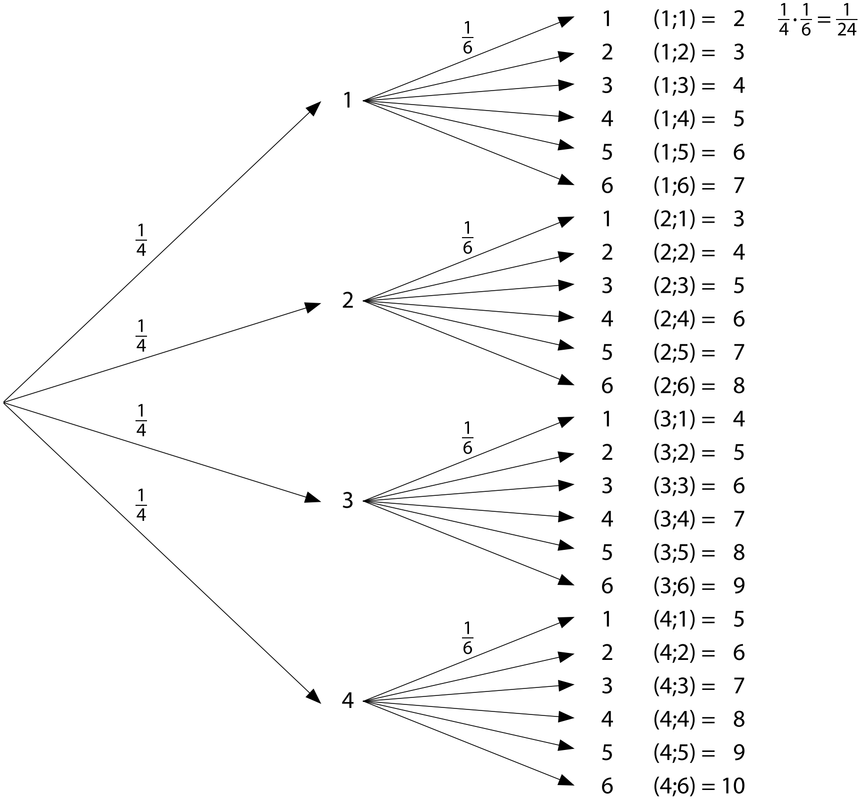
Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

6. Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen

a

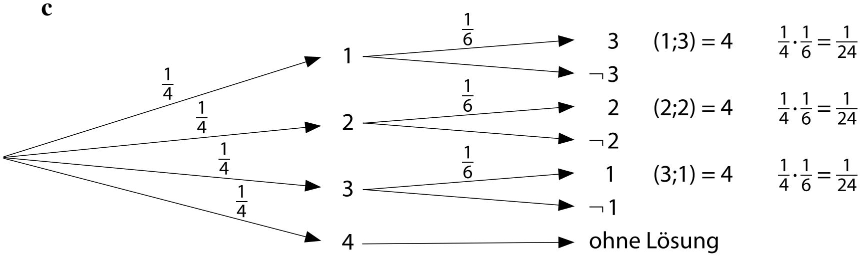
(1;1)	(1;2) (2;1)	(1;3) (3;1) (2;2)	(1;4) (4;1) (2;3) (3;2)	(1;5) (2;4) (4;2) (3;3)	(1;6) (2;5) (3;4) (4;3)	(2;6) (3;5) (4;4)	(3;6) (4;5)	(4;6)
2	3	4	5	6	7	8	9	10

b



Alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{24}$.

c



d Die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 4 beträgt $\frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$.

7. Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen

b In der Tabelle sind 57 Vierer-Kombinationen von Buchstaben vorhanden.

c

$$\begin{array}{cccccccc} \xrightarrow{\frac{1}{2}} & A & \xrightarrow{\frac{1}{2}} & N & \xrightarrow{\frac{1}{2}} & N & \xrightarrow{\frac{1}{2}} & A \\ \searrow_{\frac{1}{2}} & \neg A & \searrow_{\frac{1}{2}} & \neg N & \searrow_{\frac{1}{2}} & \neg N & \searrow_{\frac{1}{2}} & \neg A \end{array} \quad \text{ANNA } \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 6{,}25$$

8. Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen

b In der Tabelle sind 22 Dreier-Kombinationen von Buchstaben vorhanden.

c

$$\begin{array}{cccccc} \xrightarrow{\frac{2}{6}} & O & \xrightarrow{\frac{2}{6}} & M & \xrightarrow{\frac{2}{6}} & A \\ \searrow_{\frac{4}{6}} & \neg O & \searrow_{\frac{4}{6}} & \neg M & \searrow_{\frac{4}{6}} & \neg A \end{array} \quad \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27} = 3{,}7\,\%$$

9. Wahrscheinlichkeiten bestimmen

a Als Ergebnisse können alle Zahlen von 0 bis 99 auftreten.

b Wahrscheinlichkeit von 33, 45 oder 50: $\frac{1}{100}$
Wahrscheinlichkeit von 100: 0

c Die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 49 beträgt $\frac{1}{2}$.

d Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, das ohne Rest durch 3 teilbar ist, beträgt $\frac{34}{100}$ (0 ist auch durch 3 teilbar).

e Verschiedene Lösungen sind denkbar. Es muss ein Ereignis mit 20 möglichen Ergebnissen definiert werden.

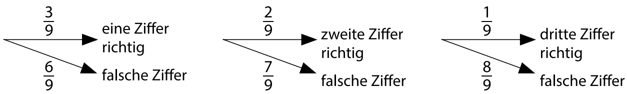
10. Einen vorgegebenen Gewinnplan umsetzen

a In höchstens 62 Prozent aller Fälle wird ein Gewinn ausgegeben. Dann müssen die für Hauptgewinn, Kleingewinn und Trostpreis definierten Ereignisse aber unabhängig voneinander sein und es müssen die maximalen Gewinnwahrscheinlichkeiten umgesetzt werden.

b Unterschiedliche Gewinnpläne sind möglich, z. B.:
Hauptgewinn: 0 und 1
Kleingewinn: 90; 91; 92; 93; 94; 95; 96; 97; 98; 99
Trostpreis: alle Zahlen von 2 bis 51

11. Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen

c Die Ziffern müssen nicht in der richtigen Reihenfolge gewürfelt werden.



$$\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{729} = 0{,}8\,\%$$

12. Wahrscheinlichkeiten bestimmen

a Die Wahrscheinlichkeit für Grün beträgt 25 Prozent $\left(\frac{1}{4}\right)$.

b Die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs beträgt 16,7 Prozent $\left(\frac{1}{6}\right)$.

c Die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Drei beträgt 4,17 Prozent $\left(\frac{1}{24}\right)$.

d Die Wahrscheinlichkeit, von einem Ereignisfeld in ein freies Zielfeld zu springen, wenn alle Zielfelder noch frei sind, beträgt 16,7 Prozent $\left(\frac{4}{24}\right)$.

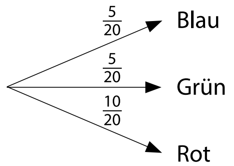
Baumwollbeutel:

1. Ein Zufallsexperiment durchführen

c Wahrscheinlichkeit Rot: 50 Prozent $\left(\frac{10}{20} = \frac{1}{2}\right)$.

Wahrscheinlichkeit Blau: 25 Prozent $\left(\frac{5}{20} = \frac{1}{4}\right)$.

d

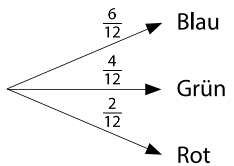


2. Ein Zufallsexperiment durchführen

c Wahrscheinlichkeit Rot: 16,7 Prozent $\left(\frac{2}{12} = \frac{1}{6}\right)$

Wahrscheinlichkeit Blau: 50 Prozent $\left(\frac{6}{12} = \frac{1}{2}\right)$

d

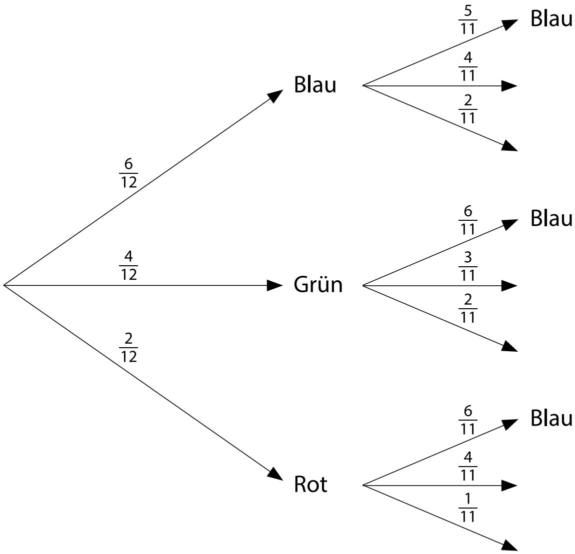


3. Zweimal ziehen – ohne Zurücklegen

a Folgende Farbkombinationen sind möglich:

Rot/Rot	Rot/Blau	Rot/Grün
Blau/Grün	Blau/Blau	
Grün/Grün		

c



$\frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{30}{132} = 22{,}7\,\%$

$\frac{6}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{24}{132} = 18{,}2\,\%$

$\frac{6}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{12}{132} = 9{,}1\,\%$

$\frac{4}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{24}{132} = 18{,}2\,\%$

$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132} = 9{,}1\,\%$

$\frac{4}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{8}{132} = 6{,}1\,\%$

$\frac{2}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{12}{132} = 9{,}1\,\%$

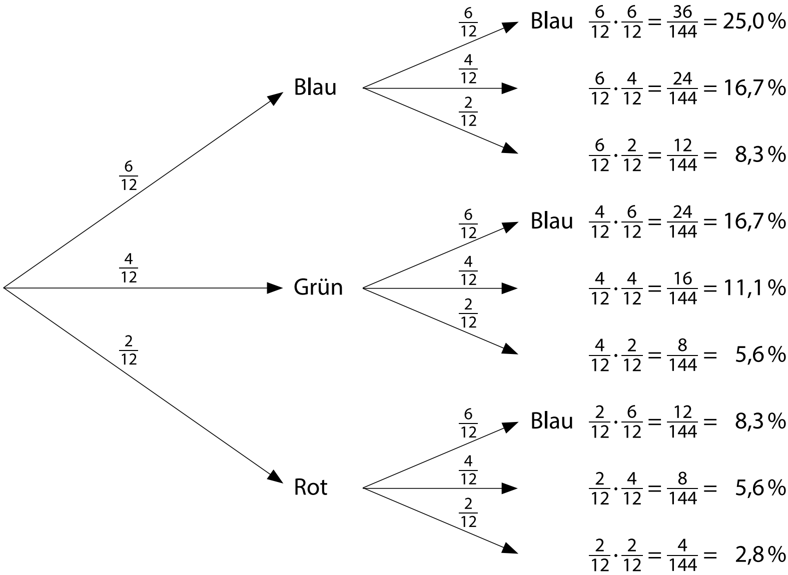
$\frac{2}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{132} = 6{,}1\,\%$

$\frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{132} = 1{,}5\,\%$

d Die Wahrscheinlichkeit für Blau/Blau beträgt 22,7 Prozent.
Die Wahrscheinlichkeit für Rot/Rot beträgt 1,5 Prozent.

4. Zweimal ziehen – mit Zurücklegen

a



b Die Wahrscheinlichkeit für Blau/Blau beträgt 25 Prozent.
Die Wahrscheinlichkeit für zwei Steine mit derselben Farbe beträgt
$\frac{36}{144} + \frac{16}{144} + \frac{4}{144} = \frac{56}{144} = 38{,}9\,\%$.

c Beim Ziehen ohne Zurücklegen ist beim zweiten Ziehen die Zahl der Steine und die Anteile der Farben im Beutel verändert. Entsprechend müssen die Wahrscheinlichkeiten der Farben auf dem zweiten Zweig neu berechnet werden, und zwar abhängig davon, welche Farbe beim ersten Ziehen gezogen wurde.

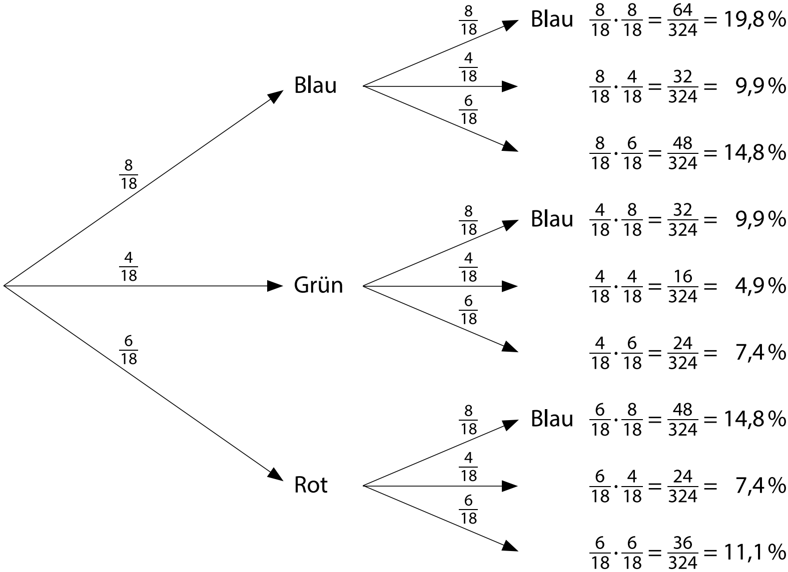
5. Wahrscheinlichkeiten bestimmen

a Wahrscheinlichkeit Blau: $\frac{8}{18} = 44{,}4\,\%$

Wahrscheinlichkeit Grün: $\frac{4}{18} = 22{,}2\,\%$

Wahrscheinlichkeit Rot: $\frac{6}{18} = 33{,}3\,\%$

b



c Die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Steine zu ziehen, beträgt $\frac{36}{324} = 11{,}1\,\%$.

d Die Wahrscheinlichkeit, zwei Steine mit derselben Farbe zu ziehen, beträgt $\frac{64}{324} + \frac{16}{324} + \frac{36}{324} = \frac{116}{324} = 35{,}8\,\%$.

6. Aussagen über Farbverteilungen machen

a

Blau	**Rot**	**Grün**
13	17	30
$\frac{13}{60} = 21{,}7\,\%$	$\frac{17}{60} = 28{,}3\,\%$	$\frac{30}{60} = 50\,\%$

b Grün erscheint jedes zweite Mal. Rot erscheint etwas häufiger als Blau.
Da insgesamt 20 Steine im Beutel sind, ist folgende Verteilung plausibel:
4 blaue Steine (Wahrscheinlichkeit Blau: 20 %)
6 rote Steine (Wahrscheinlichkeit Rot: 30 %)
10 grüne Steine (Wahrscheinlichkeit Grün: 50 %).

Dies ist nur eine Vermutung. Die Farbverteilung kann auch ganz anders aussehen.

c Hier sollen die ermittelten relativen Häufigkeiten mit denen aus a verglichen und vorsichtige Rückschlüsse auf die Richtigkeit der Vermutung in b gezogen werden.

7. Aussagen über Farbverteilungen machen

a

Blau	Rot	Grün	Gelb
14	19	6	23
$\frac{14}{62}$ = 22,6 %	$\frac{19}{62}$ = 30,6 %	$\frac{6}{62}$ = 9,7 %	$\frac{23}{62}$ = 37,1 %

b So könnte man vorgehen: Zunächst errechnet man, wie viele der 25 Steine im Beutel blau, rot, gelb oder grün wären, wenn die ermittelten re-la-tiven Häufigkeiten gleich den Wahrscheinlichkeiten wären.
22,6 % von 25 Kugeln: 5,65 blaue Steine
30,6 % von 25 Kugeln: 7,65 rote Steine
9,7 % von 25 Kugeln: 2,43 grüne Steine
37,1 % von 25 Kugeln: 9,28 gelbe Steine
Durch Runden erhält man folgende plausible Farbverteilung:
6 blaue Steine (Wahrscheinlichkeit Blau: 24 %)
8 rote Steine (Wahrscheinlichkeit Rot: 32 %)
2 grüne Steine (Wahrscheinlichkeit Grün: 8 %)
9 gelbe Steine (Wahrscheinlichkeit Gelb: 36 %).
Dies ist nur eine Vermutung. Die Farbverteilung kann auch ganz anders aussehen – zumal die Rundungsfehler ganz erheblich sind.

c Hier sollen die ermittelten relativen Häufigkeiten mit denen aus a verglichen und vorsichtige Rückschlüsse auf die Richtigkeit der Vermutung in b gezogen werden.

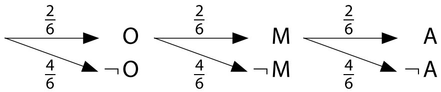
8. Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen

b In der Liste sind 22 Dreier-Kombinationen von Buchstaben vorhanden.

c Es gibt 27 verschiedene Buchstabenkombinationen:
OOM; OOA; MMO; MMA; AAO; AAM;
MOO; AOO; OMM; AMM; OAA; MAA;
OMO; OAO; MOM; MAM; AOA; AMA;

OMA; OAM; MAO; MOA; AMO; AOM; OOO; MMM; AAA.
Die sinnvollen Buchstabenkombinationen sind die Wörter OMA und MAO.

d

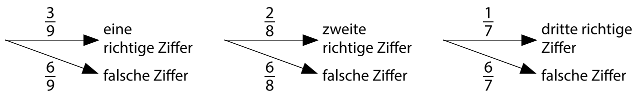


$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27} = 3{,}7\,\%$

e Die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort „OMA“ nicht entsteht, beträgt $\frac{26}{27} = 96{,}3\,\%$.

9. Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen

c Die Ziffern müssen nicht in der richtigen Reihenfolge gezogen werden.



$\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$

Da die Wahrscheinlichkeit für „3 richtige Ziffern“ $\frac{1}{84}$ beträgt, ist nicht zu erwarten, dass in einer Klasse mit etwa 30 Schülerinnen und Schülern ein solches Ereignis auftritt.

10. Einen vorgegebenen Gewinnplan umsetzen

Für diese Aufgabe gibt es eine Fülle von Lösungen, die auch davon abhängig sind, welche Steine in welchen Farben und Anzahlen in den Baumwollbeutel gelegt werden. Wir geben hier eine Beispiellösung an:

a In den Baumwollbeutel werden folgende Steine gelegt:
2 rote Steine
4 blaue Steine
8 grüne Steine
6 gelbe Steine.
Nacheinander werden zwei Steine gezogen, wobei der zuerst gezogene Stein wieder zurückgelegt wird. Die Farben müssen in der angegebenen Reihenfolge gezogen werden:

Hauptgewinn: Der zuerst gezogene Stein ist rot, der danach gezogene Stein ist blau.
Kleingewinn: Der zuerst gezogene Stein ist rot, die Farbe des danach gezogenen Steins ist beliebig.

Trostpreis: Der zuerst gezogene Stein ist blau oder gelb, die Farbe des danach gezogenen Steins ist beliebig.

c Hauptgewinn: $\frac{2}{20} \cdot \frac{4}{20} = \frac{8}{400} = 2\,\%$

Kleingewinn: $\frac{2}{20} \cdot 1 = \frac{2}{20} = 10\,\%$

Trostpreis: $\left(\frac{4}{20} + \frac{6}{20}\right) \cdot 1 = \frac{10}{20} = 50\,\%$

Unregelmäßige Zufallsgeräte:

1. **Wahrscheinlichkeiten vermuten**
   a Wahrscheinlich werden die Zahlen auf den großen Quaderflächen häufiger gewürfelt. Das sind die Zahlen 4, 3, 1 und 6.

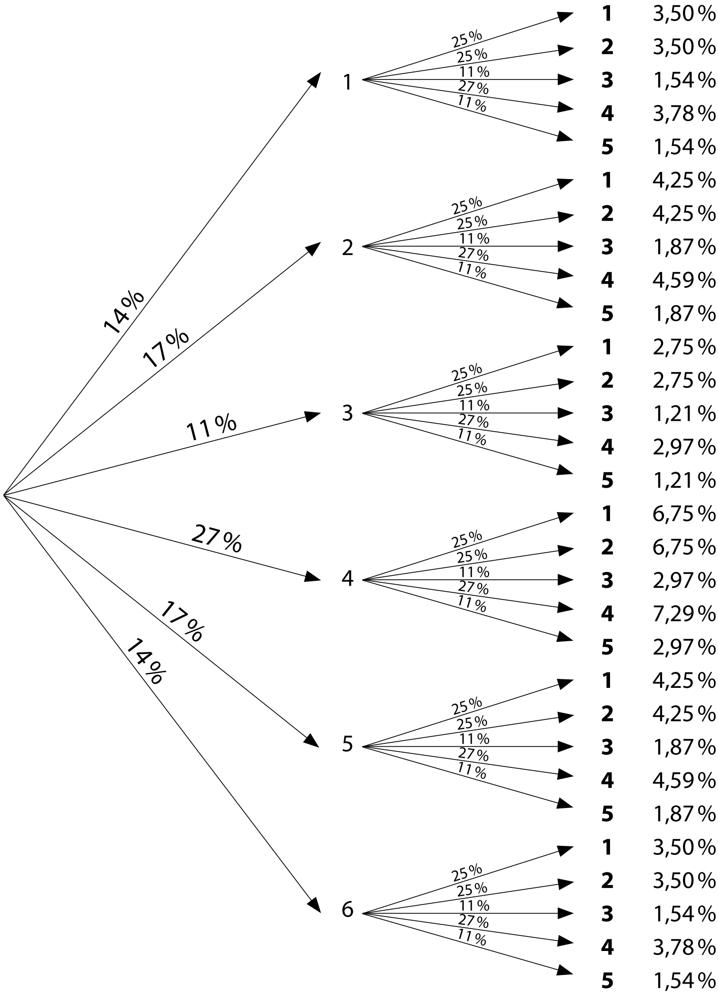
2. **Wahrscheinlichkeiten vermuten**
   a Aufgrund der ungleichen Massenverteilung wird die Zahl 4 am häufigsten auftreten.

3. **Wahrscheinlichkeiten vermuten**
   a Aufgrund der ungleichen Massenverteilung wird wahrscheinlich die Zahl 4 häufiger auftreten.

4. Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen

a Bei diesem Zufallsversuch können die Augensummen 2 bis 11 auftreten.

b



c p (Augensumme 2) = 3,5 %

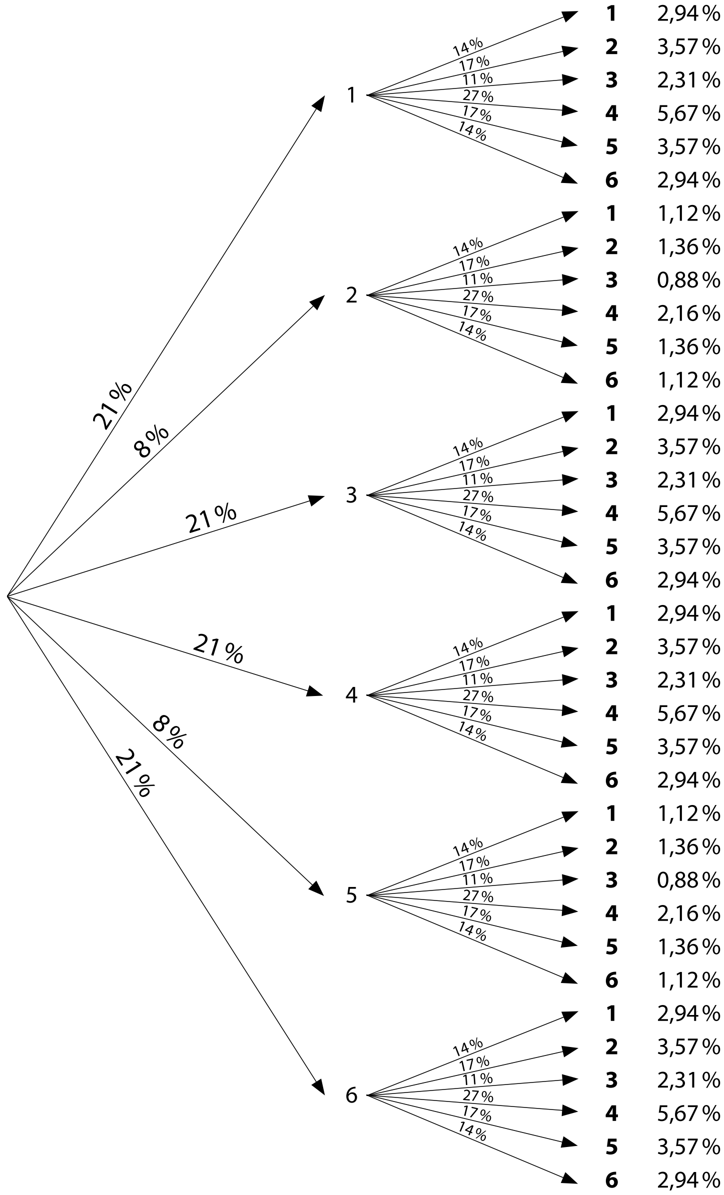
p (Augensumme 6) = 1,54 % + 4,59 % + 1,21 % + 6,75 % + 4,25 % = 18,34 %

p (Augensumme 11) = 1,54 %

5. Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen

a Bei diesem Zufallsversuch können die Augensummen 2 bis 12 auftreten.

b

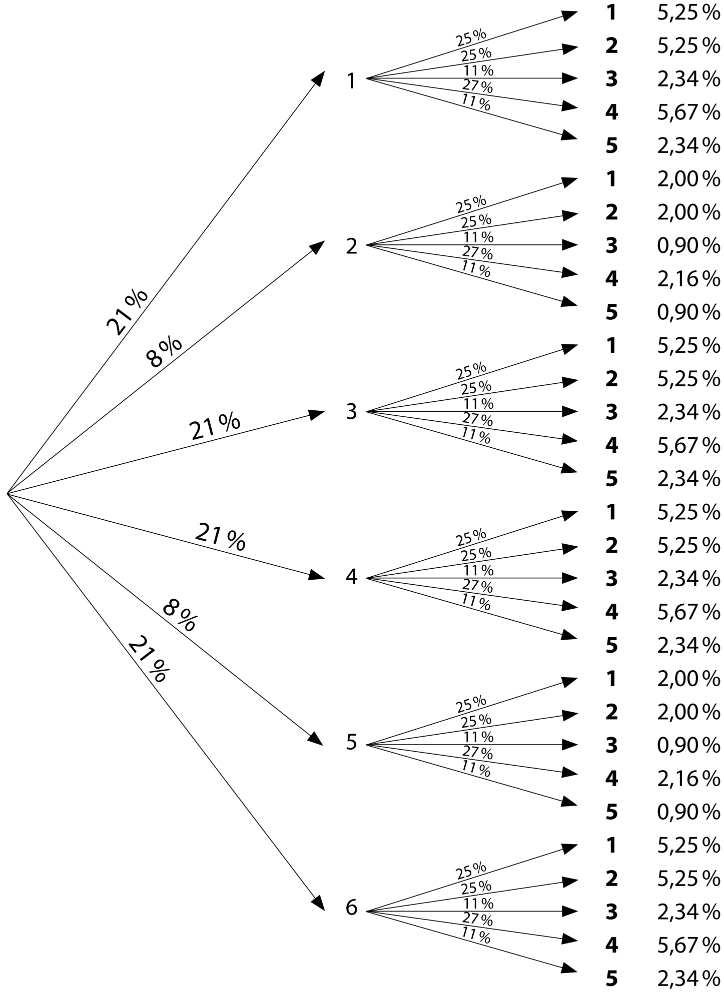


c p (Augensumme 2) = 2,94 %
p (Augensumme 4) = 2,31 % + 1,36 % + 2,94 % = 6,61 %
p (Augensumme 12) = 2,94 %

6. Ein zweistufiges Zufallsexperiment durchführen

a Bei diesem Zufallsversuch können die Augensummen 2 bis 11 auftreten.

b



c p (Augensumme 2) = 5,25 %
p (Augensumme 10) = 0,9 % + 5,67 % = 6,57 %
p (Augensumme 11) = 2,34 %

7. Ein verkürztes Baumdiagramm zeichnen

a Bei diesem Zufallsversuch können die Augensummen 3 bis 17 auftreten.

b Die Augenkombination 2; 3; 3 kommt mit der geringsten Wahrscheinlichkeit vor, da in den Tabellen mit den angegebenen relativen Häufigkeiten die 2 beim ersten Würfel mit 8 % die geringste Wahrscheinlichkeit besitzt, die 3 beim 2. Würfel mit 11 % und beim 3. Würfel die 3 mit ebenfalls 11 % die geringste Wahrscheinlichkeit besitzt.

c

$$\xrightarrow{21\,\%} 1 \quad \xrightarrow{25\,\%} 1 \quad \xrightarrow{14\,\%} 1 \quad 0{,}735\,\%$$

8. Gewinnchancen ermitteln

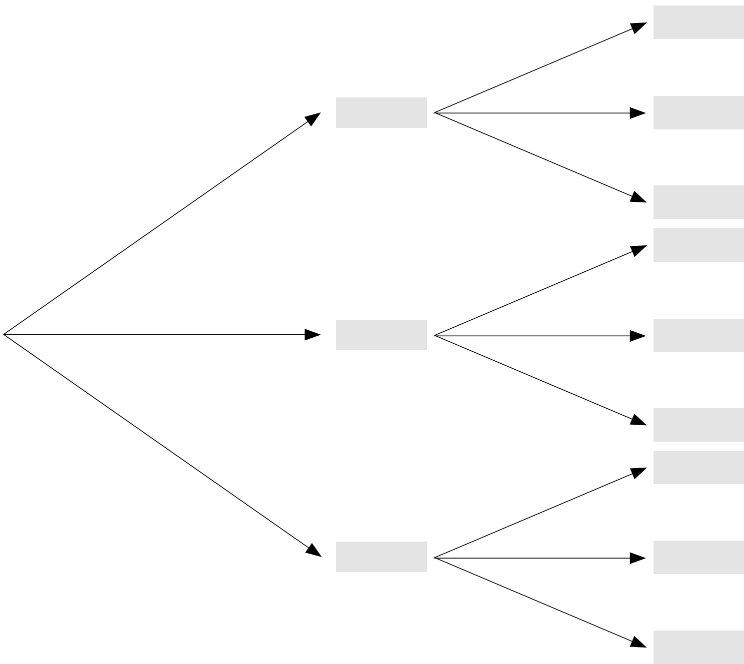
Der Spieler 1 hat eine Wahrscheinlichkeit von 16 %, beim Würfeln einen Schritt weiter zu kommen. Der Spieler 2 hat eine Chance von 84 %.

Wenn der Spieler 1 nur 4 Felder bis zum Ziel hat und der Spieler 2 21 Felder, dann sind die Gewinnchancen gleich.

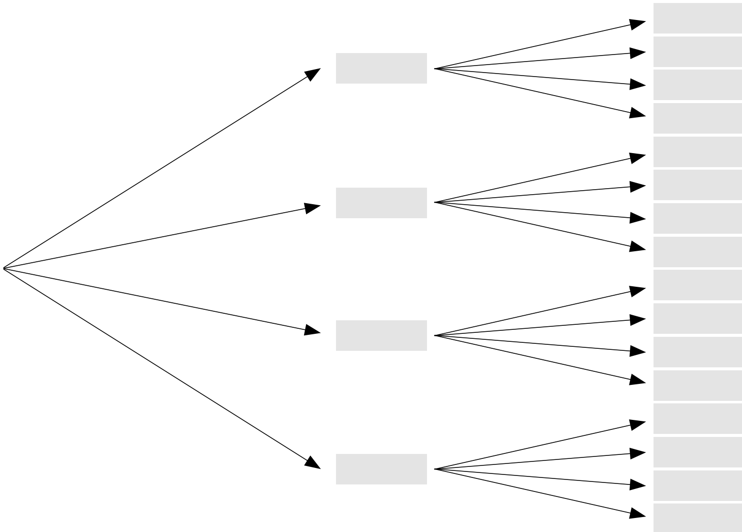
KOPIERVORLAGE

1

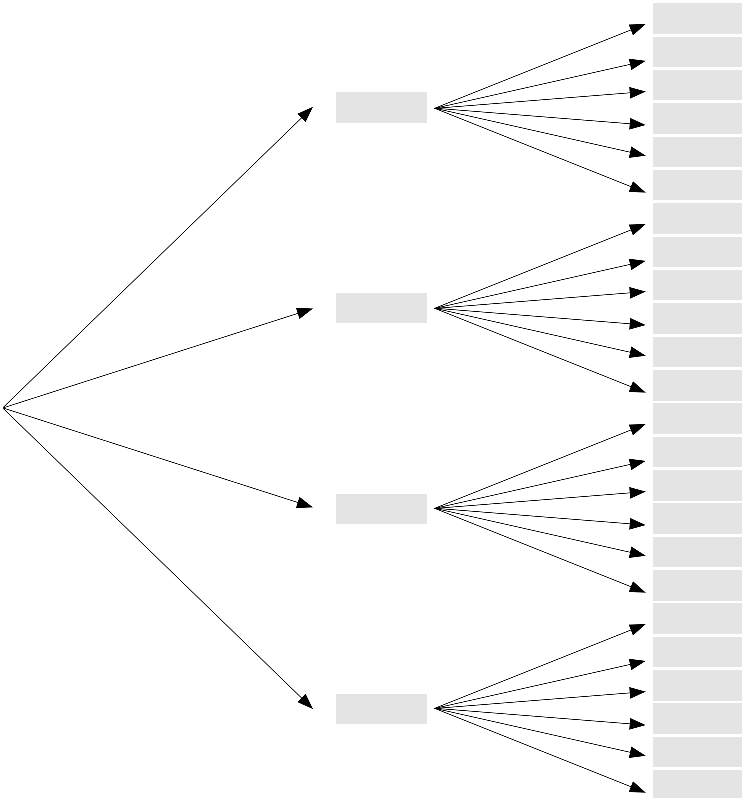
3 × 3-Baumdiagramm



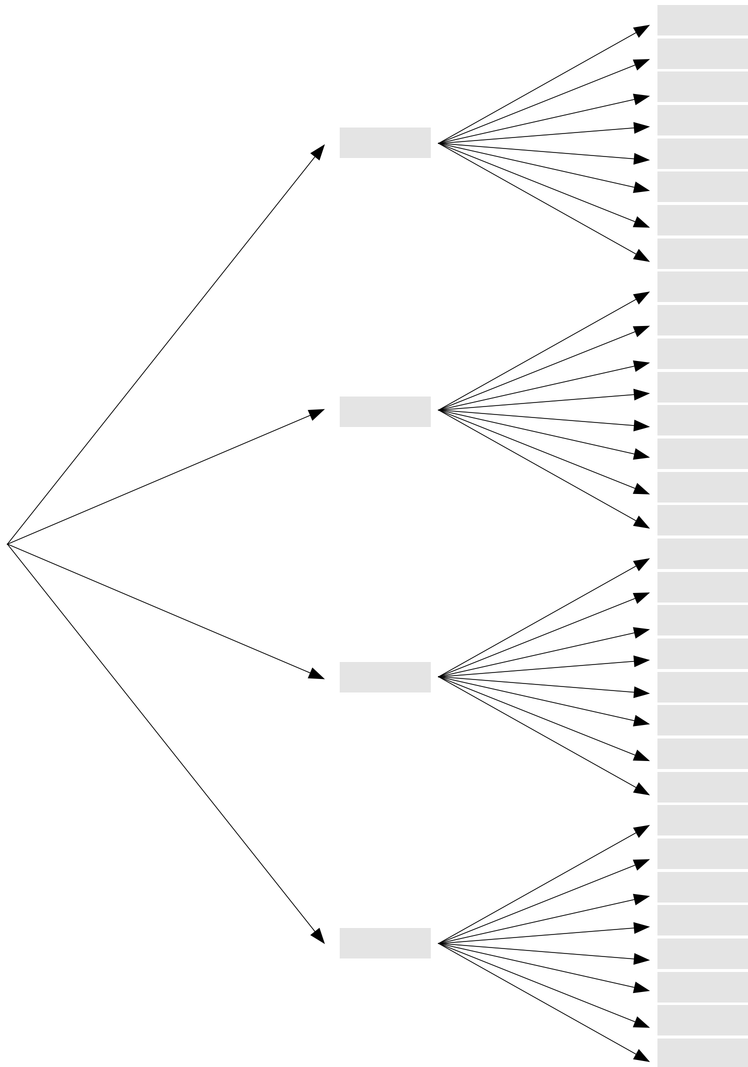
4 × 4-Baumdiagramm



4 × 6-Baumdiagramm



4 × 8-Baumdiagramm



6 × 6-Baumdiagramm