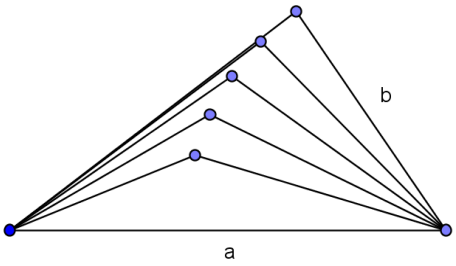
Lösungen und Kommentare zur MatheWelt „Geometrie einmal anders“

Wie war das noch?

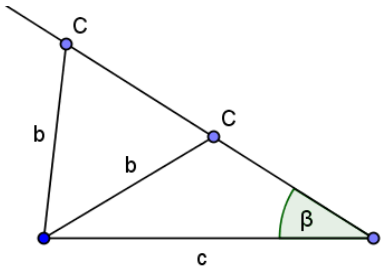
1. Kongruente und inkongruente Dreiecke

a) Sind nur zwei Seiten eines Dreiecks gegeben, so ist dieses Dreieck nicht eindeutig zu zeichnen. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, ein Dreieck zu zeichnen, das die gegebenen Kriterien erfüllt. In der Skizze sehen wir fünf inkongruente Dreiecke, die die gemeinsame Seite a haben. Die Seite b ist bei allen Dreiecken gleich lang, schließt mit der Seite a jedoch jeweils einen anderen Winkel ein.



b) Sind drei Seiten eines Dreiecks gegeben, so ist dieses Dreieck eindeutig bestimmt. Zwei Dreiecke, die in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen, sind immer kongruent zueinander (erster Kongruenzsatz SSS).

c) Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind immer kongruent zueinander (zweiter Kongruenzsatz SWS).Wird der gegebene Winkel nicht von den Seiten eingeschlossen, liegt jedoch der kürzeren Seite gegenüber, so kann es sein, dass es ein, zwei oder keine Möglichkeiten gibt, das Dreieck zu zeichnen. Sind die Werte zufällig (oder gewollt) so gewählt, dass beim Punkt C ein rechter Winkel entsteht, so gibt es nur eine Möglichkeit. In der Skizze rechts sehen wir den Fall, dass es zwei Möglichkeiten gibt (Die Dreiecke sind inkongruent). Ist der Winkel bei β zu groß, sodass die Seite b die Seite a nicht schneidet, dann existiert kein Dreieck mit den geforderten Kriterien.



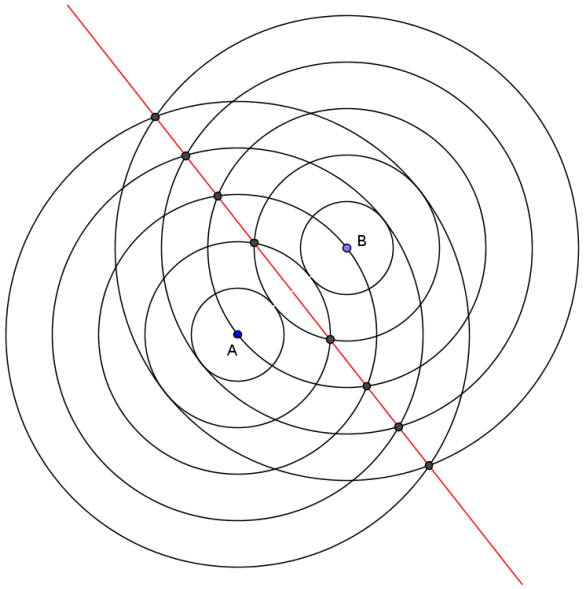
Nun kann der gegebene Winkel auch von den Seiten a und b eingeschlossen werden, sodass der gegebene Winkel der längeren Seite gegenüber liegt. In diesem Fall kann man das Dreieck eindeutig zeichnen (vierter Kongruenzsatz SSW). Somit kann man insgesamt höchstens vier inkongruente Dreiecke zeichnen, bei denen zwei Seiten und ein Winkel übereinstimmen.

d) Wird der rechte Winkel von den gegebenen Seiten eingeschlossen, so ist das Dreieck eindeutig (SWS). Ebenso eindeutig (jedoch inkongruent zum ersten Dreieck) ist das Dreieck, wenn der rechte Winkel der längeren Seite gegenüber liegt. Liegt der rechte Winkel der kürzeren Seite gegenüber, so kann man mit den gegebenen Angaben kein Dreieck zeichnen. Insgesamt gibt es zwei Möglichkeiten, inkongruente Dreiecke zu zeichnen.

2. Punkte und Kreise

a) Ein Kreis hat einen Mittelpunkt und eine Kreislinie, wobei alle Punkte auf der Kreislinie den gleichen Abstand zum Mittelpunkt haben. Somit liegen alle Punkte, die vom Punkt A den Abstand 1 cm haben, auf der Kreislinie des Kreises mit Mittelpunkt A und Radius 1 cm. Entsprechendes gilt auch für die Abstände 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm. Analog für den Punkt B.

b)



c) Die Punkte, die von A und B den gleichen Abstand haben, liegen alle auf einer gemeinsamen Geraden, die die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zwischen A und B ist.

3. Punkte auf der Mittelsenkrechten

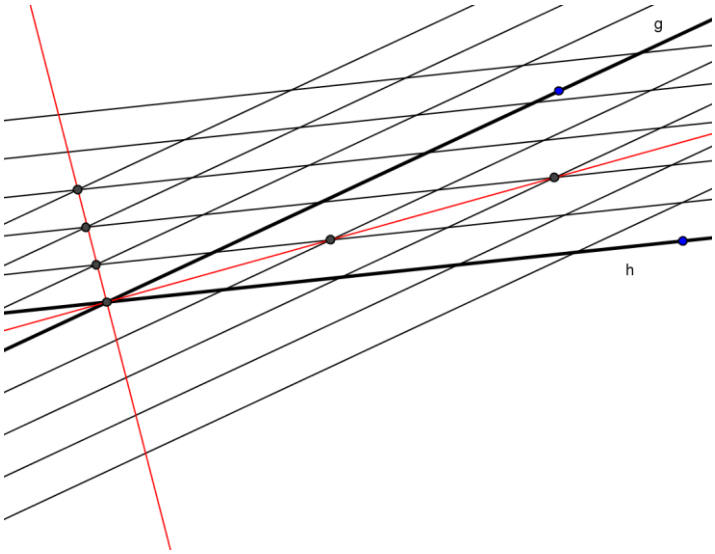
a) M stellt den Mittelpunkt der Strecke von A nach B dar, halbiert diese somit. Daraus folgt, dass die Strecken von A nach M und M nach B gleich lang sind. Außerdem teilen sich die Dreiecke AMP und BPM die gemeinsame Seite MP. Insgesamt stimmen in beiden Dreiecken zwei Seiten überein. Der Winkel, der jeweils von den gemeinsamen Seiten eingeschlossen wird, ist 90° groß. Somit folgt mit dem zweiten Kongruenzsatz (SWS), dass die Dreiecke AMP und BPM kongruent sind. Daher sind die Strecken AP und BP gleich lang.

b) Der Punkt P hat von A und B jeweils den gleichen Abstand, somit sind die Strecken BP und PA gleich lang. Da M die Strecke AB halbiert, sind die Strecken AM und MB gleich lang. Die Strecke PM ist eine gemeinsame Seite der Dreiecke AMP und BPM. Insgesamt stimmen die Dreiecke AMP und BPM in ihren drei Seitenlängen überein, woraus ihre Kongruenz folgt.

4. Von der Parallelen zur Winkelhalbierenden

a) Alle Punkte, die von g den Abstand 1 cm haben, liegen auf einer Geraden, die parallel zu g ist. Gleiches gilt für die Abstände 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm. Analog für die Gerade h.

b)



c) Es ist deutlich zu erkennen: Die Punkte, die den gleichen Abstand von g und h haben, liegen auf zwei Geraden, die senkrecht zueinander stehen. Beide dieser Geraden gehen durch den Schnittpunkt der Geraden g und h und bilden jeweils eine Winkelhalbierende der entsprechenden Winkel, die von g und h eingeschlossen werden.

5. Die Winkelhalbierende

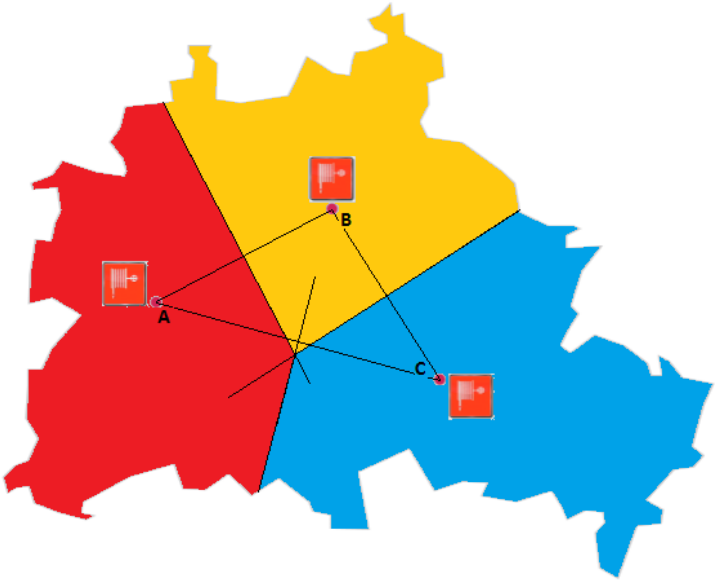
a) H und G sind Lotfußpunkte, das bedeutet, dass die Dreiecke SPG und SHP bei H und G je einen rechten Winkel haben. Da der Punkt P den gleichen Abstand von g und von h hat, sind die Strecken PG und HP gleich lang. Außerdem haben die Dreiecke SPG und SHP die gemeinsame Seite SP. Insgesamt haben die beiden Dreiecke zwei gemeinsame Seiten und einen rechten Winkel, wobei der rechte Winkel bei beiden Dreiecken der längeren Seite gegenüber liegt. Somit gilt nach SSW, dass die Dreiecke SPG und SHP kongruent sind. Aus der Kongruenz folgt, dass die Winkel GSP und PSH gleich groß sind.

b) Die Strecke SP ist die Winkelhalbierende des Winkels GSH. Somit sind die Winkel GSP und PSH gleich groß. Da die Dreiecke SPG und SHP außerdem je einen rechten Winkel haben, folgt mit der Innenwinkelsumme von 180° für Dreiecke, dass die Winkel HPS und SPG gleich groß sind. Bei den Dreiecken SPG und SHP stimmen alle Winkel und eine entsprechende Seite (SP) überein. Man kann sich auf dieser Grundlage überlegen, dass entsprechende Dreiecke kongruent sein müssen (allgemein: Kongruenzsatz WSW; wurde in Aufgabe 1 nicht wiederholt);deshalb hat der Punkt P von g und h den gleichen Abstand.

Direkt zum Ziel

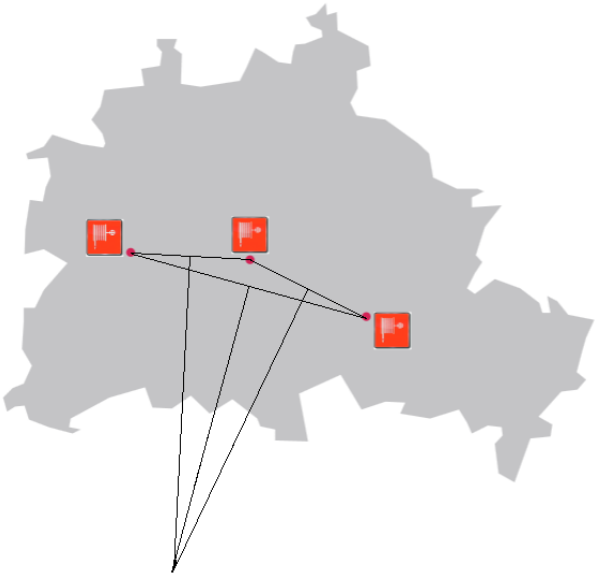
6. Die Feuerwehrstationen

a) Alle Punkte, die gleich weit vom Punkt A und B sind, liegen auf der Mittelsenkrechten von AB. Somit bildet die Mittelsenkrechte die Grenze der Feuerwehrgebiete. Analog für CB und BC:



b) Der Punkt, bei dem alle Löschfahrzeuge gleich schnell vor Ort sind, ist der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Mittelsenkrechten. Es ist der Umkreismittelpunkt.

c) Wenn die drei Feuerwehrstationen so liegen, dass der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten außerhalb des Stadtgebietes liegt, so gibt es innerhalb der Stadt keinen Ort, an dem die Löschfahrzeuge zur gleichen Zeit eintreffen würden. Im Grenzfall, dass die Feuerwehrstationen eine Gerade bilden, gäbe es nicht einmal einen Ort außerhalb der Stadt, an dem die Löschfahrzeuge zur gleichen Zeit eintreffen würden:



7. Stephan und seine Mittelsenkrechten

Tipp 1:
Ein Punkt auf der Mittelsenkrechten einer Strecke AB hat den gleichen Abstand vom Punkt A wie vom Punkt B.

Tipp 2:
Betrachte Stephans Mittelsenkrechte der Strecke AB: Der Punkt im Dreieck RPQ muss näher bei A liegen als bei B, da der Punkt links von der Mittelsenkrechten liegt.

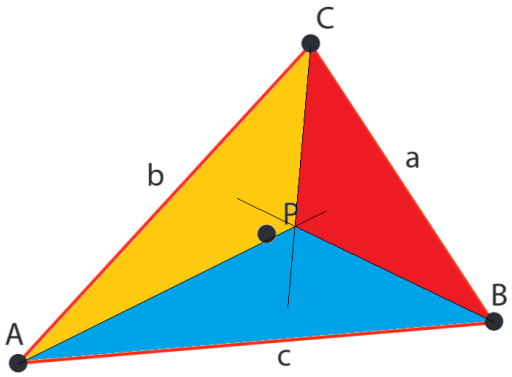
Tipp 3:
Die Betrachtung der Mittelsenkrechten der Strecke BC verdeutlicht, dass der Punkt im kleinen Dreieck näher bei B liegt. Die Betrachtung der Mittelsenkrechten der Strecke CA verdeutlicht, dass der Punkt im kleinen Dreieck näher bei C liegt.

Lösung:
Bezeichnen wir den Punkt im kleinen Dreieck mit Z, so gilt: |AZ|<|BZ|<|CZ|<|AZ| woraus der Widerspruch folgt, dass |AZ|<|AZ| gilt. Entsprechend kann es sich bei Stephans Zeichnung nicht um die Mittelsenkrechten handeln.

8. Ein Verbrecher auf der Flucht

a) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie eines Punktes zu einer Geraden. Diese kürzeste Verbindungslinie ist das Lot, das vom Punkt auf die Gerade gefällt wird. Betrachten wir jeweils die Lote von P auf die Gerade a, b und c, so erkennen wir, dass für den Verbrecher die Stadtgrenze b am nächsten liegt und somit am schnellsten zu erreichen ist.

b) Alle Punkte einer Winkelhalbierenden von zwei Geraden sind gleich weit entfernt von den beiden Geraden, haben also den gleichen Abstand. Somit stellen die Winkelhalbierenden im Dreieck die Grenzen der Orte innerhalb der Stadt dar, von denen man jeweils am schnellsten an die Stadtgrenze a, b oder c gelangt.



c) Der Punkt, von dem alle Grenzen gleich schnell erreichbar sind, ist der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Wenn wir von diesem Punkt aus die Lote auf die Seiten a, b und c fällen, so sind die Strecken vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zu den Lotfußpunkten gleich lang. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt des Inkreises.

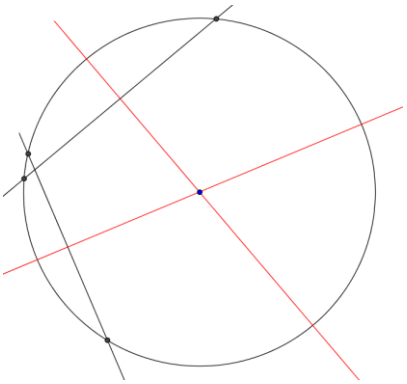
9. Stephan und seine Winkelhalbierenden

Wir haben gelernt, dass ein Punkt auf der Winkelhalbierenden von zwei Geraden a und b den gleichen Abstand von der Geraden a hat wie von der Geraden b. Betrachten wir Stephans Winkelhalbierende der Seiten a und b, so sehen wir, dass der Punkt im Dreieck RPQ näher bei der Seite a liegen muss als bei der Seite b, da der Punkt links von der Winkelhalbierenden liegt. Die Betrachtung der Winkelhalbierenden der Seiten b und c verdeutlicht, dass der Punkt im kleinen Dreieck näher bei der Seite b liegt. Die Betrachtung der Winkelhalbierenden der Seiten c und a verdeutlicht, dass der Punkt im kleinen Dreieck näher bei der Seite c liegt.

Bezeichnen wir den Punkt im kleinen Dreieck mit Z, den Lotfußpunkt von Z auf a mit h_a, den Lotfußpunkt von Z auf b mit h_b und den Lotfußpunkt von Z auf c mit h_c ,so gilt demnach: $|Zh_a| < |Zh_b| < |Zh_c| < |Zh_a|$, woraus der Widerspruch $|Zh_a| < |Zh_a|$ folgt. Entsprechend kann es sich bei Stephans Zeichnung nicht um die Winkelhalbierenden handeln.

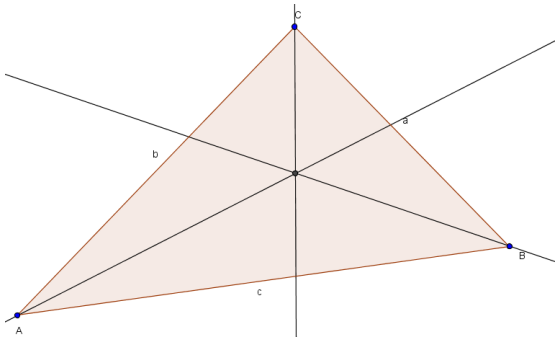
10. Mittelpunkt gesucht

Zeichne zwei beliebige Sehnen des Kreises, die nicht identisch sind (nach Möglichkeit sollten sie auch nicht zu nah beieinander liegen). Konstruiere nun die Mittelsenkrechten der Sehnen. Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Mittelpunkt des Kreises.



11. Inkreis eines Dreiecks

Wir suchen den Kreis, dessen Kreislinie im Idealfall alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Denn dann haben wir den größten Kreis, der in das Dreieck passt. Dass die Kreislinie alle drei Seiten des Dreiecks berührt, ist äquivalent zur Aussage, dass der Mittelpunkt des gesuchten Kreises den gleichen Abstand von jeder Dreiecksseite hat. Alle Punkte, die generell den Abstand von a und b haben, liegen auf der Winkelhalbierenden von a und b. Gleiches gilt für die Seiten b und c und c und a. Somit ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Dreiecksseiten der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.



Taxi-Geometrie

12. Taxi-Fahrten

a) **Tipp 1:** Eine Fahrt von B nach C auf kürzestem Wege kostet 80 Cent.

b) **Tipp 2:** Es gibt mehrere kürzeste Wege von A nach B. Einer dieser Wege ist der folgende: Fahre zuerst 6 Kästchen (Wegstücke) nach unten und dann 8 Kästchen nach rechts.

Lösung: Um von A nach B zu gelangen, brauchst du auf dem kürzesten Weg 6 Wegstücke nach unten und 8 Wegstücke nach rechts. Jedes Wegstück ist 100 m lang, kostet also 10 Cent mit dem Taxi.

$$6 \cdot 10\,\text{Cent} + 8 \cdot 10\,\text{Cent} = 140\,\text{Cent}$$

c) **Tipp 1:** Durch Probieren können wir leicht feststellen, dass wir – egal welchen der kürzesten Wege wir nehmen – 6 Wegstücke nach unten und 8 Wegstücke nach rechts gehen müssen.

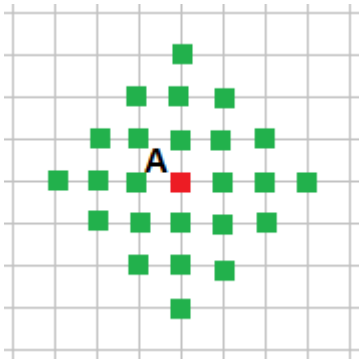
Tipp 2: Um auf einem kürzesten Weg von A nach B zu gelangen, müssen insgesamt 14 Wegstücke zurückgelegt werden. Zu jeder Auswahl von 6 der 14 Wegstücke gehört ein eindeutiger kürzester Weg von A nach B. Zum Beispiel gehört zu 1, 5, 6, 9, 13, 14 der folgende kürzeste Weg: eine Wegstrecke nach unten gehen, dann 3 Wegstrecken nach rechts gehen, dann 2 Wegstrecken nach unten gehen, dann 2 Wegstrecken nach rechts gehen, dann eine Wegstrecke nach unten gehen, dann 3 Wegstrecken nach rechts gehen und schließlich zwei Wegstrecken nach unten gehen.

Tipp 3: Wie viele verschiedene Mengen mit 6 Elementen kann man aus einer Menge mit 14 Zahlen bilden?

Lösung: Die Anzahl aller möglichen Wege lässt sich durch Kombinationen ohne Wiederholung berechnen („Bei welchen 6 der 14 Schritte wird nach rechts gegangen?“ bzw. „Bei welchen 8 der 14 Schritte wird nach unten gegangen?“)

Man erhält insgesamt $\binom{14}{6} = \binom{14}{8} = 3003$ Möglichkeiten. Diese Anzahl von Möglichkeiten lässt sich auch über andere systematische Zählweisen ermitteln.

d)



e) Von A nach C: $11 \cdot 10\,\text{Cent} + 1 \cdot 10\,\text{Cent} = 120\,\text{Cent}$, 20 Cent günstiger.

f) **Tipp 1:**
Du kannst die Strecken AB und AC jeweils als Hypotenuse eines recht-winkligen Dreiecks auffassen.

Tipp 2:
Die Katheten dieser rechtwinkligen Dreiecke verlaufen horizontal und vertikal. Daher kann man ihre Länge durch das Abzählen von Kästchen bestimmen.

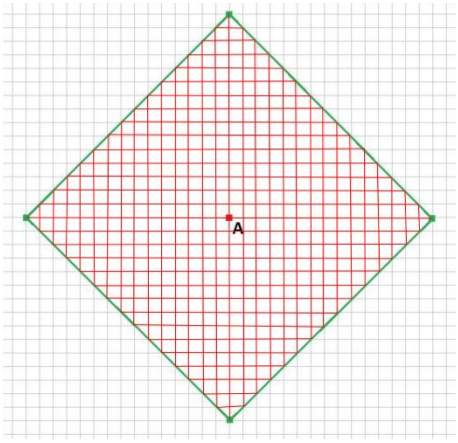
Lösung:
Laut Pythagoras gilt für rechtwinklige Dreiecke:
$(\text{Kathete 1})^2 + (\text{Kathete 2})^2 = (\text{Hypotenuse})^2$

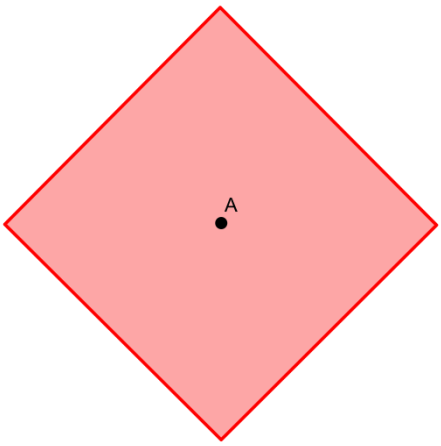
Entsprechend können wir die Luftlinien berechnen:
Von A nach B: $600^2 + 800^2 = (\text{Luftlinienweg})^2$
Somit ist die Luftlinie 1000 m lang.

Von A nach C: $1100^2 + 100^2 = (\text{Luftlinienweg})^2$
Somit ist die Luftlinie 1104,5 m lang.

13. Die Schachbrettstadt

a)

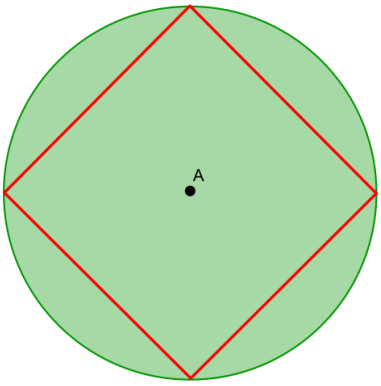




Im linken Bild sind die Straßen noch so gerade erkennbar. Die Punkte, die wir für 1,50 € erreichen können liegen innerhalb des (grünen) Quadrats und auf einer Straße. Sie sind rot markiert. Im rechten Bild sind keine Straßen mehr erkennbar. Die Straßen sind also gewissermaßen überall. Daher sind alle Punkte innerhalb des roten Quadrats erreichbar.

b)

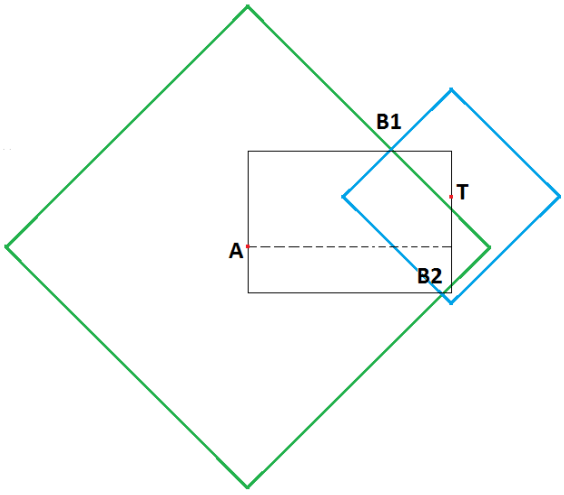
Wenn das Taxi in alle Richtungen fahren könnte, würde es für 1,50 € alle Punkte im grünen Kreis erreichen können.



14. Wo kann der Kunde abgesetzt worden sein?

Tipp 1: Zeichne alle Punkte, die von A den Taxiabstand 3,8 km haben.

Tipp 2: Zeichne alle Punkte, die von T den Taxiabstand 1,7 km haben.



Lösung:

Durch Ausmessen können wir ermitteln, dass der Taxiabstand zwischen A und T etwa 4 km lang ist (3,2 nach rechts und 0,8 nach oben).

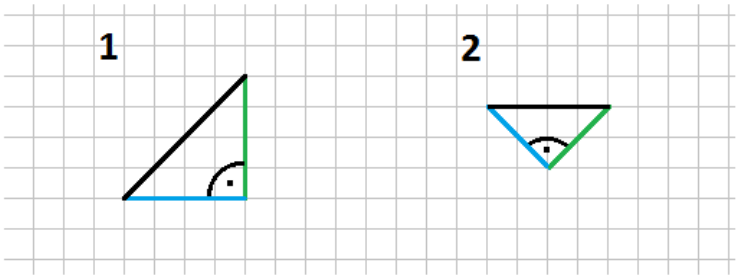
Das grüne Quadrat stellt alle Punkte dar, die einen Taxiabstand von 3,8 km vom Punkt A haben. Das blaue Quadrat stellt alle Punkte dar, die einen Taxiabstand von 1,7 km vom Punkt T haben. Die Schnittpunkte der beiden Quadrate sind die möglichen Absetzorte des Kunden.

15. Dreiecke in der Taxi-Geometrie

a) a = 2 LE, b = 3 LE, c = 3 LE, a´ = 2 LE, b´ = 3 LE, c´ = 3 LE (LE:= Längeneinheiten)

b) **Tipp:**
Wähle ein Dreieck und einen seiner Winkel aus. Drehe das Dreieck ein wenig um den Scheitel des gewählten Winkels. Haben sich dabei die Taxilängen der anliegenden Schenkel verändert? Falls ja, verlängere oder verkürze die anliegenden Schenkel so, dass ihre Taxilängen den Taxilängen der Schenkel des Ausgangsdreiecks entsprechen.

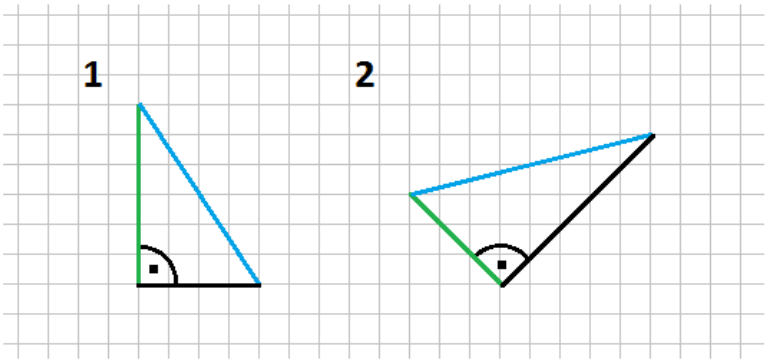
Lösung:



Beide Dreiecke sind rechtwinklig und ihre Katheten haben jeweils eine Taxilänge von 4 LE. Wir erkennen mit bloßem Auge, dass die Dreiecke 1 und 2 nicht deckungsgleich (also inkongruent) sind.

c) **Tipp:**
Wähle ein rechtwinkliges Dreieck. Drehe das Dreieck ein wenig um den Scheitel des rechten Winkels. Verlängere oder verkürze einen anliegenden Schenkel so, dass seine Taxilänge gleich der Taxilänge des entsprechenden Schenkels des Ausgangsdreiecks ist. Verlängere oder verkürze den anderen anliegenden Schenkel nun so, dass die Taxilänge der „Hypotenuse“ des gedrehten Dreiecks genauso groß ist wie die Taxilänge der „Hypotenuse“ des Ausgangsdreiecks.

Lösung:
Die beiden folgenden Dreiecke sind rechtwinklig. Ihre grünen Seiten und ihre blauen Seiten sind jeweils gleich lang. Der rechte Winkel liegt jeweils der blauen Seite gegenüber. Die beiden Dreiecke erfüllen somit den Kongruenzsatz SS90°. Wir erkennen jedoch mit bloßem Auge, dass die Dreiecke 1 und 2 nicht deckungsgleich (also inkongruent) sind.

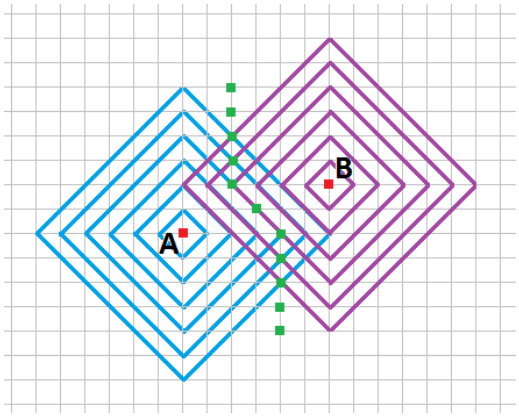


16. Die Isoabstandskurve

a) Tipp:

Es entsteht ein ähnliches Bild wie bei Aufgabe 2. Statt konzentrischer Kreise um A und B zeichnet man diesmal konzentrische Quadrate.

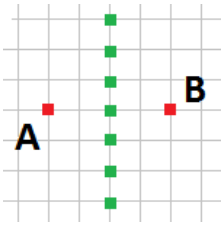
Lösung:



b) Tipp:

Die Isoabstandskurve aus Aufgabenteil (a) enthält ein (Zwischen-)Stück, dass nicht vertikal verläuft. Bewege nun den Punkt B ein wenig, z.B. ein Kästchen nach unten. Wie verändert sich dabei die Länge des Zwischenstücks? Gibt es eine Position für B, sodass das Zwischenstück, also der Knick, verschwindet?

Lösung:



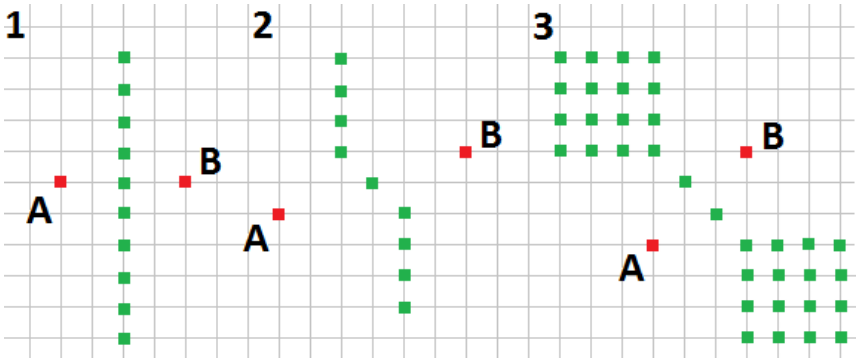
c) Tipp 1:

Neben der „Geraden mit Knick“ (siehe Aufgabenteil (a)) und der vertikal oder horizontal verlaufenden Geraden (siehe Aufgabenteil (b)) gibt es noch eine dritte Form, die die Isoabstandskurve annehmen kann.

Tipp 2:

Es gibt „horizontale Geraden mit Knick“ und „vertikale Geraden mit Knick“. Bei welcher gegenseitigen Lage von A und B findet der Übergang von der einen Form in die andere statt? Wie sieht diese Übergangsform aus?

Lösung:



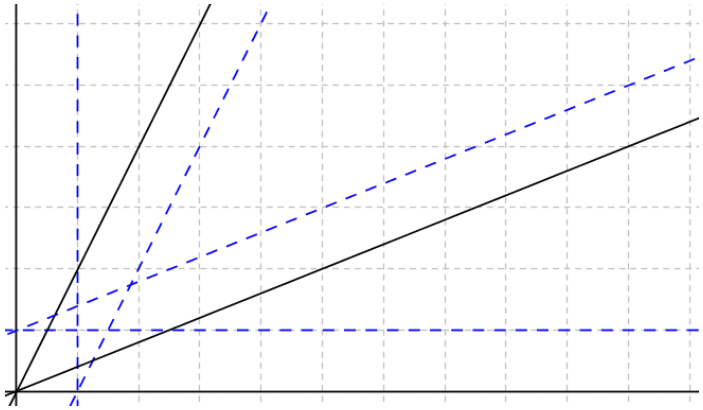
Häufig entstehen „Geraden“ mit einem Knick wie es in Abbildung 2 zu sehen ist. Im Fall, dass die Punkte A und B auf einer „Straße“ liegen, ihr Taxi-Abstand also gleich dem uns aus der Euklidischen Geometrie bekannten Abstand ist, entsteht eine Gerade (Abbildung 1). Im besonderen Fall, dass die Punkte A und B im Gitternetz die gegenüberliegenden Eckpunkte eines („liegenden“) Quadrats darstellen, entstehen achsen-symmetrische Muster wie in Abbildung 3.

17. Parallele Geraden mit Taxiabstand

a) Tipp:

Der Taxiabstand zwischen einem Punkt und einer Geraden ist entweder die Entfernung, die man in horizontaler Richtung, oder die Entfernung, die in vertikaler Richtung von dem Punkt aus zurücklegen muss, um zu der Geraden zu gelangen.

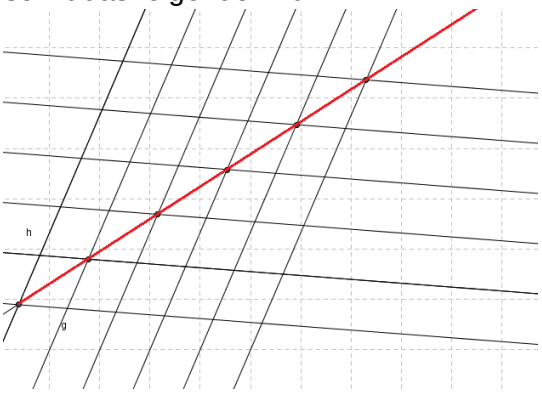
Lösung:



b) Tipp:

Der Taxiabstand zweier paralleler Geraden, deren Steigung zwischen 1 und -1 liegt, ist gleich der Entfernung, die man in vertikaler Richtung von der einen Geraden zur Anderen zurücklegen muss. Der Taxiabstand zweier paralleler Geraden, deren Steigung nicht zwischen 1 und -1 liegt, ist gleich der Entfernung, die man in horizontaler Richtung von der einen Geraden zur Anderen zurücklegen muss.

Lösung: Wir erhalten somit das folgende Bild:



Ähnlich wie bei der Konstruktion der Winkelhalbierenden entsteht also auch hier wieder eine Gerade.

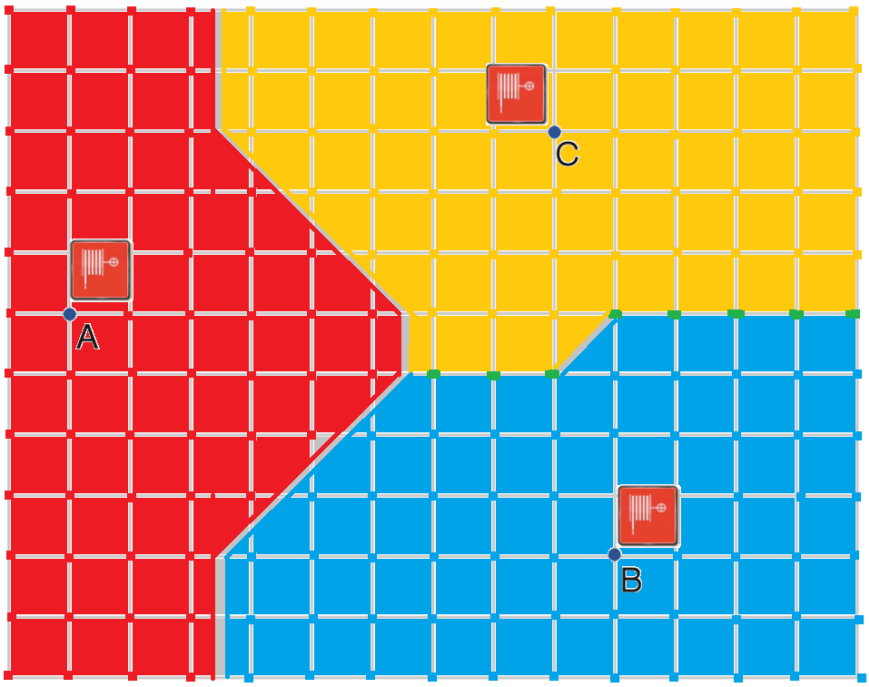
c) Es entsteht eine vergleichbare Situation und ein vergleichbares Bild wie in b). Diesmal haben die zwei vorgegebenen Geraden jedoch beide eine Steigung zwischen 1 und -1

18. Die Feuerwehr in der Schachbrettstadt

a) Tipp:

Zeichne die Isoabstandskurve von A und B, die Isoabstandskurve von B und C und die Isoabstandskurve von C und A.

Lösung:



b) Tipp 1:

Wenn zwei der drei Isoabstandskurven der Ecken des Dreiecks einen Schnittpunkt haben, so muss auch die dritte Isoabstandskurve durch diesen Schnittpunkt verlaufen. Bei einem Dreieck bei dem es keinen Punkt gibt, wo alle Löschfahrzeuge gleichzeitig vor Ort sind, müssen die drei Isoabstandskurven folglich „parallel“ verlaufen.

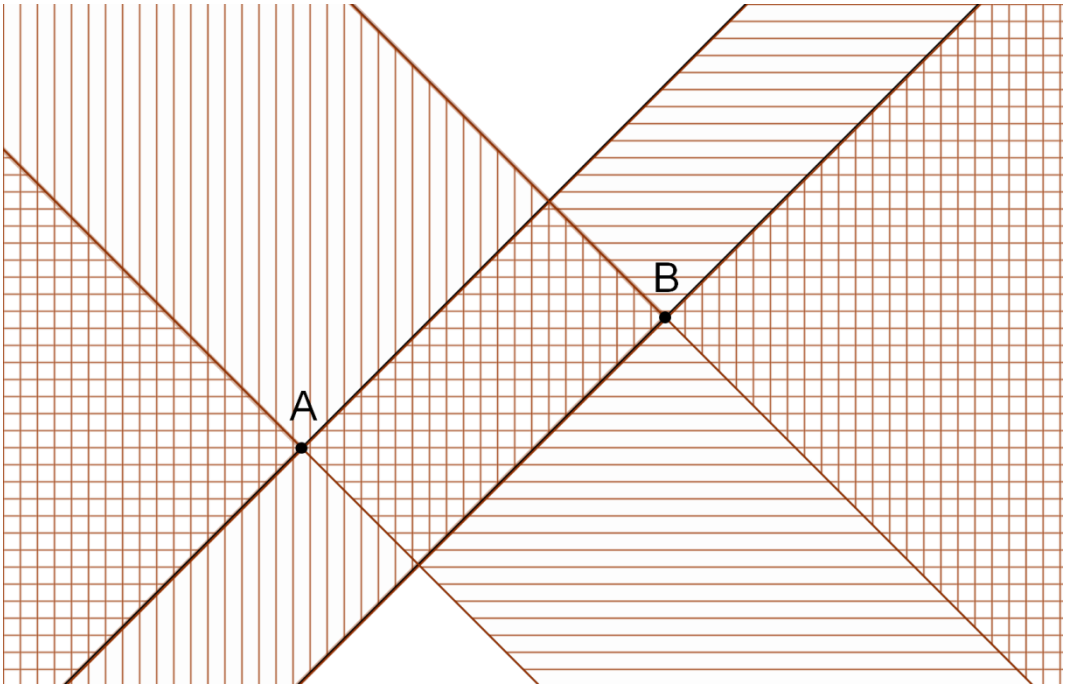
Tipp 2:

Gibt es keinen gemeinsamen Schnittpunkt, so sind alle drei Isoabstandskurven entweder „horizontale Geraden mit Knick“ oder alle drei „vertikale Geraden mit Knick“.

Tipp 3:

Was kann man über die Steigung der Verbindungsgerade zweier Punkte sagen, wenn die Isoabstandskurve der beiden Punkte eine „horizontale Gerade mit (oder ohne) Knick“ ist? Was kann über die Steigung der Verbindungsgerade zweier Punkte sagen, wenn die Isoabstandskurve der beiden Punkte eine „vertikale Gerade mit (oder ohne) Knick“ ist?

Tipp 4:
Wir bauen ein Dreieck deren drei Isoabstandkurven „horizontale Geraden mit Knick“ sind. Zunächst wählen wir einen beliebigen Punkt A. Dieser bildet die erste Ecke des Dreiecks. Da die Isoabstandkurve von A und B eine „horizontale Gerade mit Knick“ sein soll, muss B auf einer Geraden durch A liegen, deren Steigung zwischen 1 und -1 liegt (d.h. wir müssen für B einen Punkt im horizontal schraffierten Gebiet wählen). Das Gleiche gilt auch für den Punkt C. Da aber schließlich auch die Isoabstandskurve von B und C eine „horizontale Gerade mit Knick“ sein soll, muss der Punkt C auf einer Geraden durch B liegen, deren Steigung zwischen 1 und -1 liegt (d.h. wir müssen für C einen Punkt im vertikal schraffierten Gebiet wählen. Der Punkt C muss somit im kariert schraffierten Gebiet liegen).



Tipp 5:
Wir betrachten noch einmal das oben stehende Bild.

Wählen wir den Punkt C im linken Teil des karierten Gebiets, so verläuft sowohl die Gerade durch A mit Steigung 1 als auch die Gerade durch A mit Steigung -1 durch das Dreieck ABC.

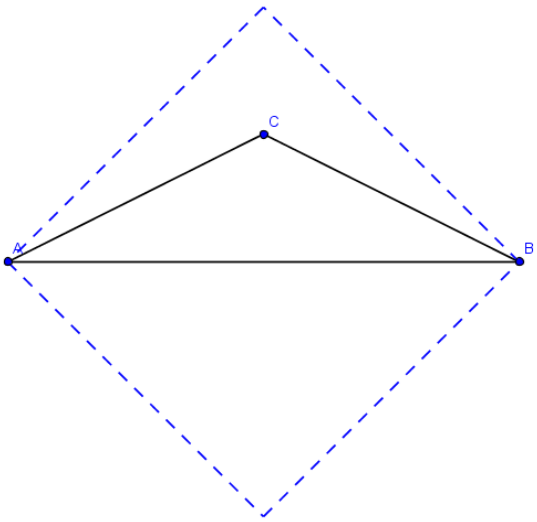
Wählen wir den Punkt C im rechten Teil des karierten Gebiets, so verläuft sowohl die Gerade durch B mit Steigung 1 als auch die Gerade durch B mit Steigung -1 durch das Dreieck ABC.

Wählen wir den Punkt C im mittleren Teil des karierten Gebiets, so verläuft sowohl die Gerade durch C mit Steigung 1 als auch die Gerade durch C mit Steigung -1 durch das Dreieck ABC.

Lösung:
In einem Dreieck ABC sind alle Löschfahrzeuge gleichzeitig vor Ort, wenn bei jeder der drei Ecken A, B und C entweder die Gerade mit Steigung 1 durch die Ecke oder die Gerade mit Steigung –1 durch die Ecke oder beide Geraden außerhalb des Dreiecks verlaufen.

c) Tipp:
Zeichne ein Dreieck, bei dem sich die Isoabstandskurven der Ecken nicht schneiden.

Lösung:



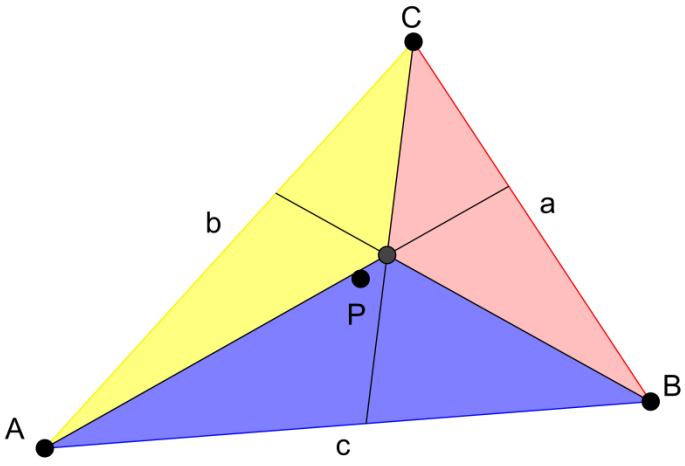
19. Verbrecherjagd in der Schachbrettstadt

a) Tipp:
Bestimme den Taxiabstand von P mit den drei Seiten des Dreiecks. Welcher der drei Abstände ist am kleinsten?

Lösung:
Der Verbrecher erreicht am schnellsten die Stadtgrenze c (vgl. Teilaufgabe b)).

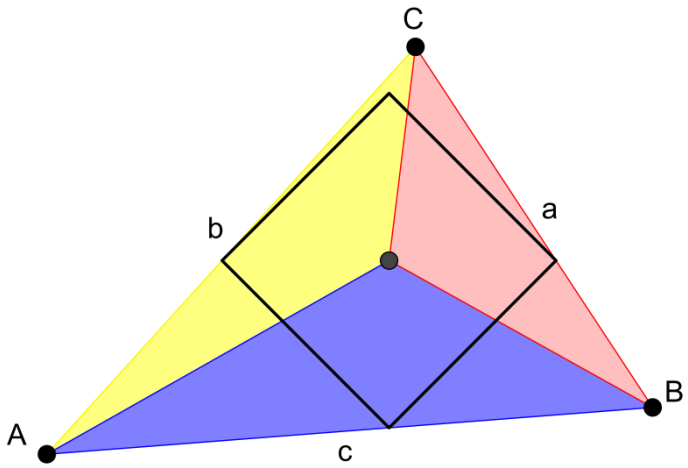
b) Tipp:
In Aufgabe 17 hast du gelernt, wie man in der Taxigeometrie die Isoabstandskurve von zwei Geraden zeichnet. Zeichne also die drei Isoabstandkurven der Paare von Seiten des Dreiecks.

Lösung:



c) Der Punkt liegt auf den drei Isoabstandskurven der Paare von Seiten des Dreiecks (vgl. Teilaufgabe b)).

d)



Es handelt sich um den Punkt aus Teilaufgabe c).

20. Begründen in der Schachbrettstadt

Angenommen es schneiden sich nur jeweils zwei der Geraden in einem Punkt. Dann hätten wir statt eines einzigen Schnittpunkts drei Schnittpunkte P, Q und R. Sei X ein Punkt innerhalb des Dreiecks PQR. Dann gilt:

|Xa|<|Xb|<|Xc|<|Xa|, was zum Widerspruch führt, dass |Xa|<|Xa| gilt.

|Xa|>|Xb|>|Xc|>|Xa|, was zum Widerspruch führt, dass |Xa|>|Xa| gilt.

Beides kann nicht sein. Also müssen sich die drei Geraden in einem einzigen Punkt schneiden.

Die Aufgaben 21 und 22 dienen deiner eigenen Reflexion.