

Beziehungen entdecken an der Einmaleins-Tabelle

Malkreuz-Forscher

Christina Westerhausen Zu Beginn des 3. Schuljahres werden die Einmaleinsreihen häufig mit Hilfe einer Einmaleins-Tabelle erarbeitet, gefestigt und geübt. In diesem Beitrag geht es darum, wie Schülerinnen und Schüler diese Tabelle erforschen und mit Hilfe der gefundenen Muster und Strukturen das Einmaleins festigen können. Dabei entwickeln sie auch ihr Verständnis für den Multiplikationsbegriff weiter.

Autoren

Christina Westerhausen
Lehrerin an der
Kerschensteiner Grundschule
Schweinfurt
twesterhausen@t-online.de

Die Materialien zu diesem Beitrag



- M1** Vollständige Einmaleins-Tabelle und Schablone
- M2** Bildkarte Professor Knobelix
- M3a** Einmaleinstabelle ausfüllen
- M3b** Malkreuz ausfüllen
- M4a** Summenzahlen berechnen
- M4b** Tippkarte
- M5** Anleitung zur Lösung eines Malkreuzes **D**

D Alle Downloads dieser Ausgabe finden Sie in der digitalen Ausgabe: www.friedrich-verlag.de/digital/

Symmetrien an der Einmaleins-Tabelle:

Die Diagonale, die aus den Quadratzahlen besteht, bildet die Symmetrieachse; gleiche Ergebnisse, wie z. B. $15 \text{ für } 3 \cdot 5$ und für $5 \cdot 3$, liegen symmetrisch zueinander entlang dieser Achse.

Mathematischer Hintergrund

Im Mittelpunkt dieser Unterrichtseinheit steht die Einmaleins-Tabelle (**M1**) – ein bekanntes Instrument aus dem Mathematikunterricht, das von vielen Lehrkräften erfolgreich eingesetzt wird. Sie ist gegliedert in einen Rahmen und einen Innenteil. Der Rahmen gibt an, welche Zahlen miteinander multipliziert werden (Spalte des Rahmens = erster Faktor, Zeile des Rahmens = zweiter Faktor). Im jeweiligen Innenfeld, das der entsprechenden Spalte und Zeile zuzuordnen ist, steht dann das Ergebnis (Produktwert) der Aufgabe.

Durch die lineare Anordnung der Aufgaben in der Tabelle wird die additive Struktur der Multiplikation deutlich. Sie kann also für die Kinder nachvollziehbar thematisiert werden: Jeweils einer der Faktoren wird entweder addiert oder subtrahiert, wenn man von einem Feld im Inneren zu einem waagrecht oder senkrecht benachbarten Feld wechselt. Dadurch kann das Verständnis für die Multiplikation als „verkürzte Addition“ vertieft werden.

Malkreuz eröffnen vielfältige Aufgaben an der Einmaleins-Tabelle. Mit diesen können Schülerinnen und Schüler das Einmaleins weiter automatisieren und ihr Verständnis für das additive Prinzip des Einmaleins vertiefen. Ein Malkreuz ist ein kreuzförmiger Ausschnitt der Einmaleins-Tabelle. Um ein mittleres Feld (Mittelzahl) gruppieren sich vier weitere Felder: jeweils eines links, rechts, über und unter dem Mittelfeld. In einem Malkreuz sind zwei Felder bereits ausgefüllt, die übrigen bleiben leer. Die Aufgabe ist es zunächst, die leeren Felder mit den passenden Zahlen zu befüllen.

Die Einmaleins-Tabelle mit Malkreuzen erforschen

Die Schülerinnen und Schüler haben bereits in den letzten Unterrichtseinheiten die Einmaleins-Tabelle kennengelernt. Sie ...

- können sich in der Tabelle orientieren,
- wissen, dass die Vorspalte den ersten Faktor und die Kopfzeile den zweiten Faktor jeder Malaufgabe anzeigt,

- haben Analogien in der Tabelle entdeckt (z. B. $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 24$) und
- haben den symmetrischen Aufbau der Tabelle erforscht.

Nun wird mit einem Bild die Identifikationsfigur Professor Knobelix (**M2**) eingeführt – ein liebenswürdiger und zerstreuter Wissenschaftler, der mit Leidenschaft alles im Zusammenhang mit Zahlen erforscht. Anhand eines Arbeitsauftrags (**M3a**) helfen die Lernenden Knobelix dabei, die unvollständige Tabelle zu ergänzen. Auf diese Weise wiederholen sie die Einmaleins-Tabelle.

Malkreuz kennenlernen

Im nächsten Schritt werden die Malkreuz als neues Forschungsobjekt von Professor Knobelix präsentiert. Anhand eines Beispiels suchen die Schülerinnen und Schüler die fehlenden Zahlen zunächst mit Hilfe der Einmaleins-Tabelle. Zur Veranschaulichung dient die Schablone (**M1**): Sie kann genutzt werden, um die Position des Malkreuzes in der Tabelle zu lokalisieren.

Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, die Malkreuz im Arbeitsauftrag **M3b** auszufüllen. Dabei ergibt sich eine natürliche Differenzierung, weil ein Teil der Schülerinnen und Schüler die Zahlen aus der Tabelle übernimmt, während andere die Lösung bereits durch Rechnen und Kombinieren suchen. Ein Zusatzauftrag für leistungsstarke Lernende fordert dazu auf, Ideen zu entwickeln, wie die Zahlen auch ohne Nachschauen gefunden werden können (siehe **Abb. 1**).

Anschließend werden im Plenum die fehlenden Zahlen nochmal gemeinsam ergänzt. Damit stellt die Lehrkraft sicher, dass der Aufgabentyp von allen Lernenden verstanden wurde. Dabei achtet sie darauf, dass die Schülerinnen und Schüler die Begriffe Mittelzahl und Außenzahl mit der jeweiligen Position (links, rechts, oben und unten) wie im Wortspeicher auf dem Arbeitsauftrag dargestellt verwenden.

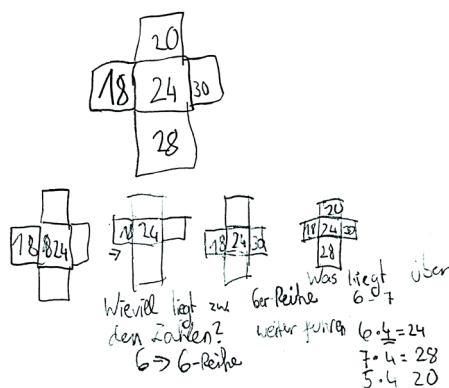


Abb. 1: Wie kann ich Malkreuz lösen, ohne in der Tabelle nachzuschauen? (Schülerbeispiel, Jgst. 4)

Malkreuz genauer erforscht

In der nachfolgenden Stunde hat Professor Knobelix wieder ein Problem, das er zusammen mit den Schülerinnen und Schüler lösen will (M4a). Dazu wird zunächst der Aufbau der Malkreuz wiederholt. Die Lernenden füllen die fehlenden Zahlen aus – und zwar nach Möglichkeit, ohne Tabelle und Schablone zu nutzen. Schülerinnen und Schüler, die diese Hilfsmittel weiter benötigen, können sie weiter verwenden.

Beim neuen Auftrag geht es nun darum, die Produkte im Malkreuz zu addieren und Auffälligkeiten zu finden, und zwar:

- zuerst zeilenweise (Summe der Zeilenzahlen),
- dann spaltenweise (Summe der Spaltenzahlen)
- und schließlich insgesamt (Summe aller Zahlen im Malkreuz).

Die erste Aufgabe kann mit den Lernenden gemeinsam gelöst werden. Bei der Summe aller Produkte des Malkreuzes ist folgender Hinweis für die Lernenden wichtig: Die Summen der Spalten- und Zeilenzahlen können nicht einfach addiert werden, um die Gesamtsumme zu errechnen, weil die Mittelzahl nur einmal erfasst werden darf. Wenn sich Schülerinnen und Schüler für diese Vorgehensweise entscheiden, müssen sie am Ende die Mittelzahl einmal vom Ergebnis subtrahieren.

Nun kann jeder Forscher selbst tätig werden und die weiteren Aufgaben bearbeiten. Eine Tippkarte (M4b) als Hilfestellung, um die Begründung für die Erkenntnis zu finden, stellt die Lehrkraft bei Bedarf zur Verfügung.

Erkenntnisse und Begründungen

Die Erkenntnisse der Schülerinnen und Schüler werden im Plenum besprochen und an der Tafel fixiert (siehe Abb. 2). Die Kinder finden heraus, dass das Dreifache der Mittelzahl der Summe der einzelnen Zeilen- oder Spaltenzahlen entspricht:

- **Zeile:** $16 + 20 + 24 = 60 = 3 \cdot 20$
- **Spalte:** $15 + 20 + 25 = 60 = 3 \cdot 20$

Außerdem ist die Summe der einzelnen Zahlen im Malkreuz gleich dem Fünffachen der Mittelzahl.

- **alle Zahlen:** $15 + 20 + 25 + 16 + 24 = 100 = 5 \cdot 20$

Auf diese Erkenntnisse kommen die Kinder meist, weil die Malkreuz so gewählt sind, dass einfache Multiplikationsaufgaben schnell erkannt werden. Schwieriger ist es, die Ursache dafür herauszufinden. Die Kinder können sie entdecken, indem die Produkte noch einmal aufgeschlüsselt werden:

Summe der Zeilen-/Spaltenzahlen

Die Außenzahl links lässt sich als Mittelzahl minus und die Außenzahl rechts als Mittelzahl plus den jeweiligen Faktor darstellen.

Für die erste Aufgabe bedeutet das mit Blick auf die Summe der Zeilenzahlen:

$$16 + 20 + 24 = 60$$

$$20 - 4 + 20 + 20 + 4 = 60$$

Die Schülerinnen und Schüler erkennen nun, dass sich die Subtraktion und die Addition des Faktors aufheben (Tipp: an der Tafel wegstreichen) und somit nur noch die Mittelzahl mal 3 gerechnet werden muss.

Dieses Vorgehen lässt sich dann analog auf die Spaltenzahlen übertragen.

Summe aller Zahlen im Malkreuz

Für das gesamte Malkreuz gilt entsprechend:

$$15 + 20 + 25 + 16 + 24 = 100$$

$$20 - 5 + 20 + 20 + 5 + 20 - 4 + 20 + 4 = 100$$

Auch hier heben sich die Additionen und Subtraktionen der beiden Faktoren auf und es bleibt 5-mal die Mittelzahlen übrig.

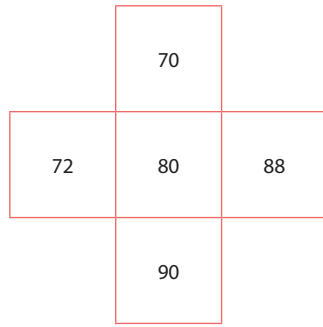
Ausweitung der Aufgaben

Wenn die Schülerinnen und Schüler verstanden haben, dass die Summe der Zeilen- bzw. der Spaltenzahlen jeweils 3-mal die Mittelzahl ist, können die Aufgabenstellungen ausgeweitet werden. Beispielsweise können die Schülerinnen und Schüler eigene Malkreuz erstellen und prüfen, ob die Regel immer gilt oder ob es Ausnahmen gibt.

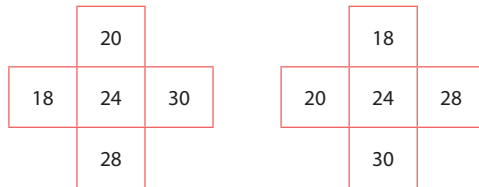
Stärkere Schülerinnen und Schüler können außerdem herausfinden, ob es ein Malkreuz mit der Gesamtsummenzahl 400 geben kann und wie dieses gegebenenfalls aussieht. Da die Addition aller Zahlen das Fünffache der Mittelzahl ist, muss nun mittels einer Umkehrrechnung die Mittelzahl herausgefunden werden. Dazu teilen die Schülerinnen und Schüler 400 durch 5 (80). Ein mögliches Malkreuz, das über die vorgegebene (kleine) Einmaleins-Tafel hinausgeht, kann nun entwickelt werden: $8 \cdot 10 = 80$

Wie findet man die richtigen Zahlen im Malkreuz?

Eine Schritt-für-Schritt-Anleitung, wie man die fehlenden Zahlen in einem Malkreuz berechnet, finden Sie online in Material M5.



Auch die symmetrische Struktur der Einmaleins-Tabelle kann nochmals aufgegriffen und gefestigt werden: Gibt es zu einem Malkreuz ein symmetrisch gelegenes zweites Malkreuz mit denselben Summenzahlen? Die Antwort ist: ja! Zum Beispiel:



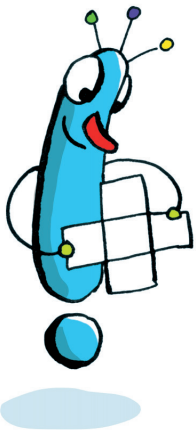
Solche Malkreuz-Paare liegen sich in der Einmaleins-Tabelle symmetrisch gegenüber, gespiegelt an der Diagonale.

Interessant sind außerdem die Überlegungen der Schülerinnen und Schüler, was passieren würde, wenn das Malkreuz in jede Richtung um ein Kästchen erweitert wird. Welche Auswirkungen hätte dies auf die Summe aller Produkte? Findige Forscherinnen und Forscher erkennen, dass die Summe aller Produkte dem Neunfachen der Mittelzahl entspricht.

Sicher gelingt es den Schülerinnen und Schülern auch, weitere Zusammenhänge im Umgang mit dem Malkreuz zu finden. Damit lernen sie den spielerischen Umgang mit Zahlen und üben und festigen das Einmaleins auf kreative Art und Weise. ■

Literatur

- Schipper, W. (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Schroedel-Verlag, Braunschweig.
- Wittmann, E. Ch., Müller, G. N. (2007): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: Walther, G. u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Cornelsen Scriptor, Berlin.



Wir erforschen Malkreuze genauer

20-5

	15	
16	20	24
	25	

20+5

Zeile: $16 + 20 + 24 = 60$

$20-4 + 20 + 20+4 = 60$

→ 3fache von 20

Spalte: $15 + 20 + 25 = 3 \cdot 20 = 60$

alle: $16 + 20 + 24 + 15 + 25 = 100$

$20-4 + 20 + 20+4 + 20-5 + 20+5 = 100$

→ 5fache von 20

Abb. 2: Mögliches Tafelbild

Foto: © bei der Autorin
Illustrationen: © Liliane Oser



Bildkarte der Identifikationsfigur Prof. Knobelix



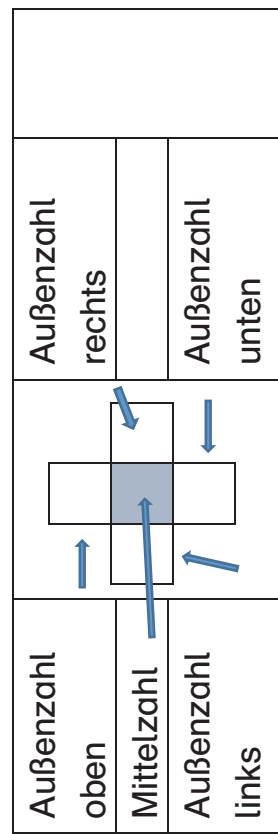


Professor Knobelix hat diese Malkreuze ausgeschnitten.

Leider fehlen Zahlen. Findest du sie?
Fülle die Malkreuze aus.

	20			25			12		63
		25							
	16						18		24
				48					
									24
									28

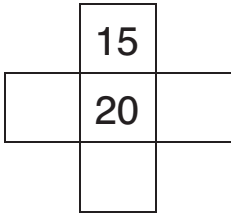
Wortspeicher:



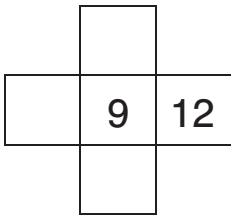


Summenzahlen berechnen

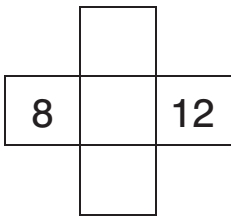
Wir erforschen Malkreuze genauer!



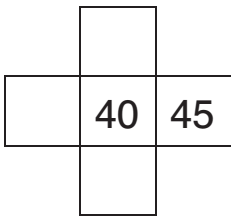
R: Zeile: _____
 Spalte: _____
 alle: _____



R: Zeile: _____
 Spalte: _____
 alle: _____



R: Zeile: _____
 Spalte: _____
 alle: _____



R: Zeile: _____
 Spalte: _____
 alle: _____

Das fällt mir auf:

Der Grund dafür ist:

Du kannst es auch gerne auf der Rückseite aufzeichnen oder skizzieren.





Tippkarte zum Arbeitsauftrag „Summenzahlen berechnen“



Schau dir das Ergebnis deiner Additionsaufgabe und die Mittelzahl genauer an! Hier gibt es eine Malaufgabe zu entdecken. Was hast du entdeckt? Überlege dir, warum das so sein könnte! Betrachte dazu die Außenzahlen genauer und denke darüber nach, wie diese entstanden sind!



Schau dir das Ergebnis deiner Additionsaufgabe und die Mittelzahl genauer an! Hier gibt es eine Malaufgabe zu entdecken. Was hast du entdeckt? Überlege dir, warum das so sein könnte! Betrachte dazu die Außenzahlen genauer und denke darüber nach, wie diese entstanden sind!

Anzeige

MEKRUPHY
GMBH

Experimentieren
im Sachunterricht

www.mekruphy.com