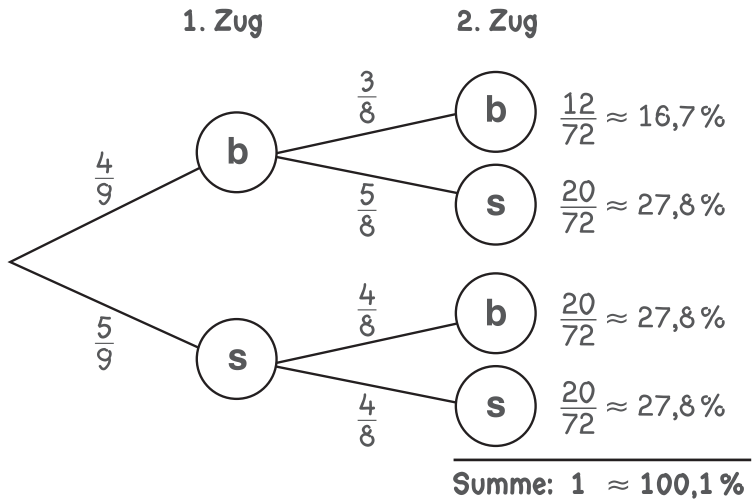
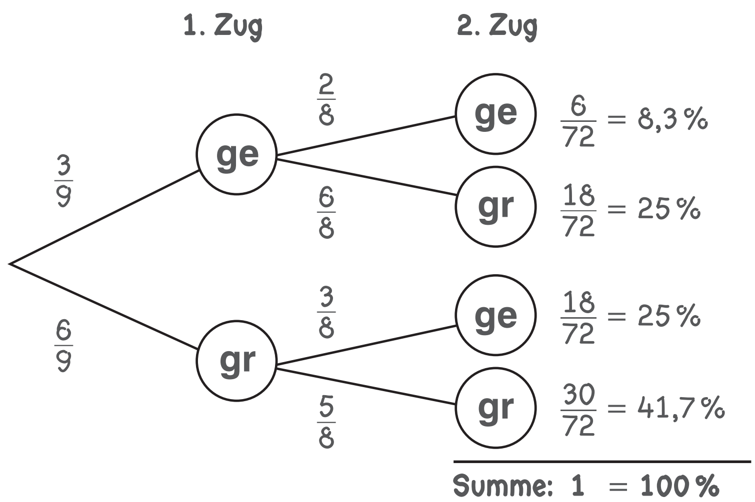
Lösungen: Aufgabensammlung 1

1.



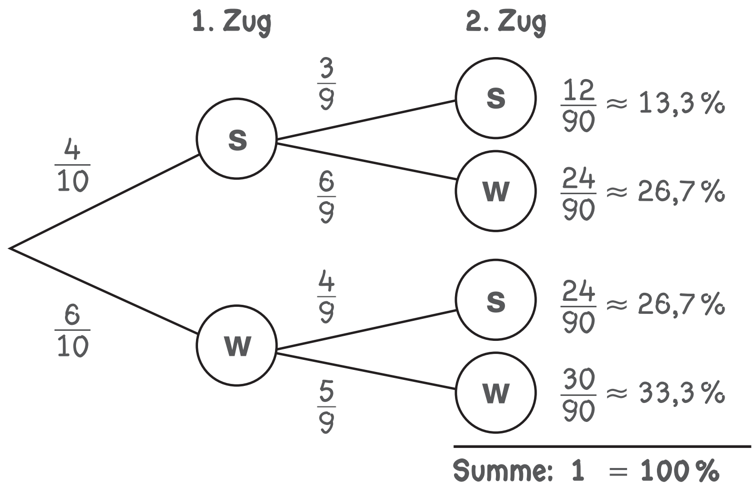
Prüfung des Baumdiagramms: Die Astwahrscheinlichkeiten von einem Punkt oder Knoten aus ergeben zusammen 1, die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten ergibt ebenfalls 1. 100,1 % ergibt sich als kleiner Rundungsfehler.
P (verschiedenfarbige Kugeln) = P (b,s) + P(s,b) = 27,8 % + 27,8 % = 55,6 %
Zwei verschiedenfarbige Kugeln werden häufiger gezogen als zwei gleichfarbige. **Folglich gewinnt man bei diesem Spiel auf lange Sicht häufiger.**

2.



Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.
P (gleichfarbige Kugeln) = P (ge,ge) + P (gr,gr) = 8,3 % + 41,7 % = 50 %
P (verschieden farbige Kugeln) = P (ge,gr) + P (gr,ge) = 25 % + 25 % = 50 %
Man kann auf beide Ereignisse mit gleichen Chancen setzen.

3.



Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.

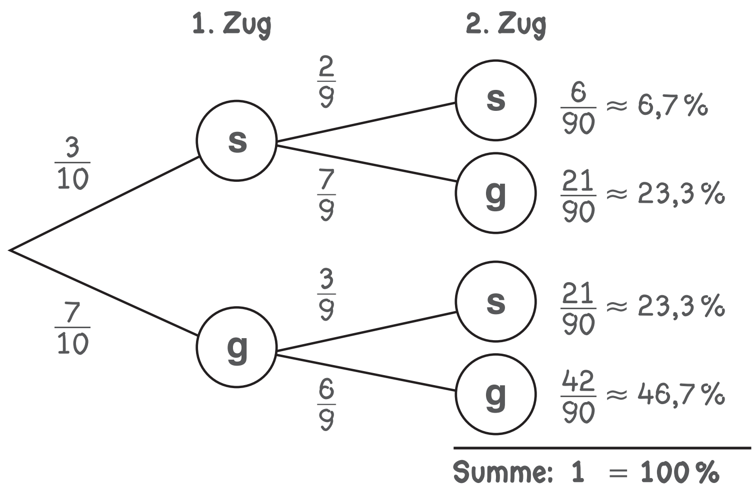
P (genau 1 weiße Kugel) = P (s,w) + P (w,s) = 26,7 % + 26,7 % = 53,4 %

P(gleichfarbige Kugeln) = P (s,s) + P (w,w) = 13,3 % + 33,3 % = 46,6 %

(genauer: $\frac{42}{90} \approx 46{,}7\,\%$)

Das erste Ereignis hat mit 53,4 % eine größere Eintrittswahrscheinlichkeit als das zweite Ereignis mit 46,7 %.

4.



Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.

P (mindestens eine schwarze Kugel) = P (s,s) + P (s, g) + P (g,s)

= 6,7 % + 23,3 % + 23,3 % = 53,3 %

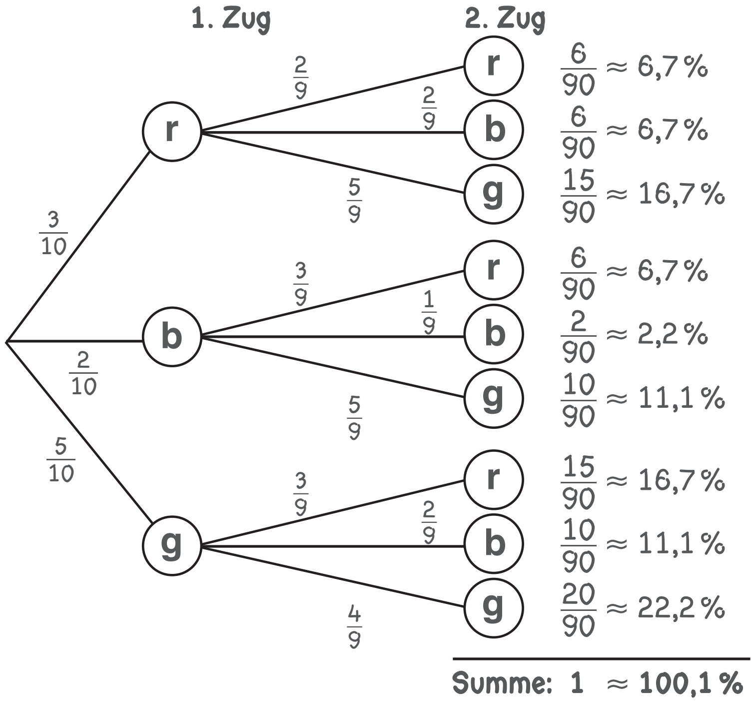
P (genau eine gelbe Kugel) = P (s,g) + P (g,s) = 23,3 % + 23,3 % = 46,6 %

(genauer $\frac{42}{90} \approx 46{,}7\,\%$)

Auf das Ereignis „mindestens eine schwarze Kugel“ kann man mit Aussicht auf langfristigen Erfolg wetten, da die Wahrscheinlichkeit für sein Eintreten mit 53,3 % über 50 % liegt. Auf „genau eine gelbe Kugel“ sollte man nicht wetten, da die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mit 46,7 % unter 50 % liegt.

Lösungen: Aufgabensammlung 2

1.

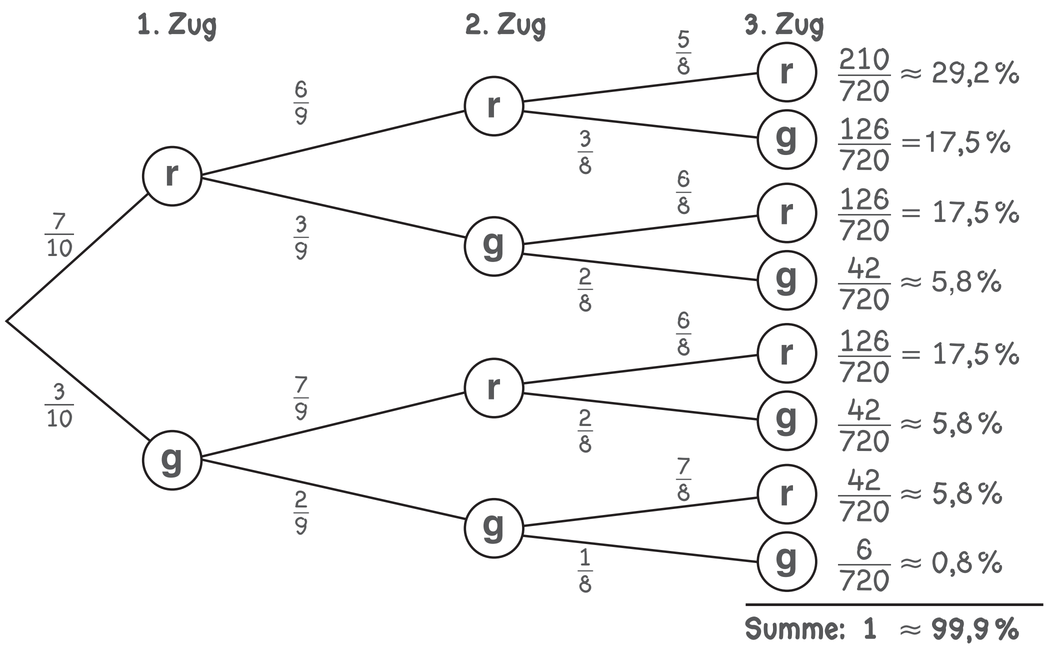


Prüfung des Baumdiagramms: Die Astwahrscheinlichkeiten von einem Punkt oder Knoten aus ergeben zusammen 1, die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten ergibt ebenfalls 1. 100,1 % ergibt sich als kleiner Rundungsfehler.

a) **P (gleichfarbige Kugeln)** $= P(r,r) + P(b,b) + P(g,g) = \frac{6}{90} + \frac{2}{90} + \frac{29}{90} = \frac{28}{90} \approx$ **31,1 %**

b) **P (keine 2 grünen Kugeln)** $= 1 - P(g,g) = 1 - \frac{20}{90} = \frac{70}{90} \approx$ **77,8 %**

2.



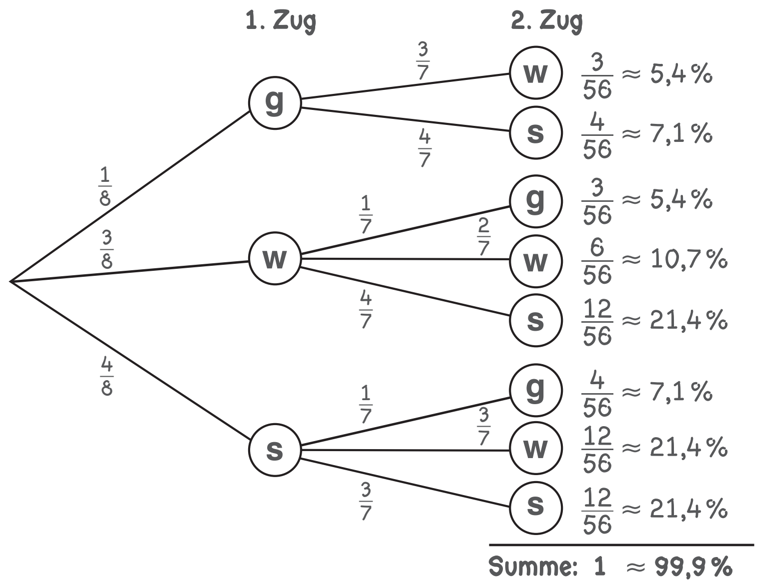
Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1. 99,9 % ergibt sich als kleiner Rundungsfehler.

a) P (genau eine grüne Kugel) $= P(r,r,g) + P(r,g,r) + P(g,r,r) = 17{,}5\,\% \cdot 3 = 52{,}5\,\%$

Es lohnt sich langfristig, auf das Ereignis zu setzen, da die Wahrscheinlichkeit für sein Eintreten mit 52,5 % über 50 % liegt.

b) „Genau eine grüne Kugel wird gezogen“ tritt dreimal mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 17,5 % auf, ebenso „genau eine rote Kugel wird gezogen“ jeweils mit rund 5,8 %.

3.



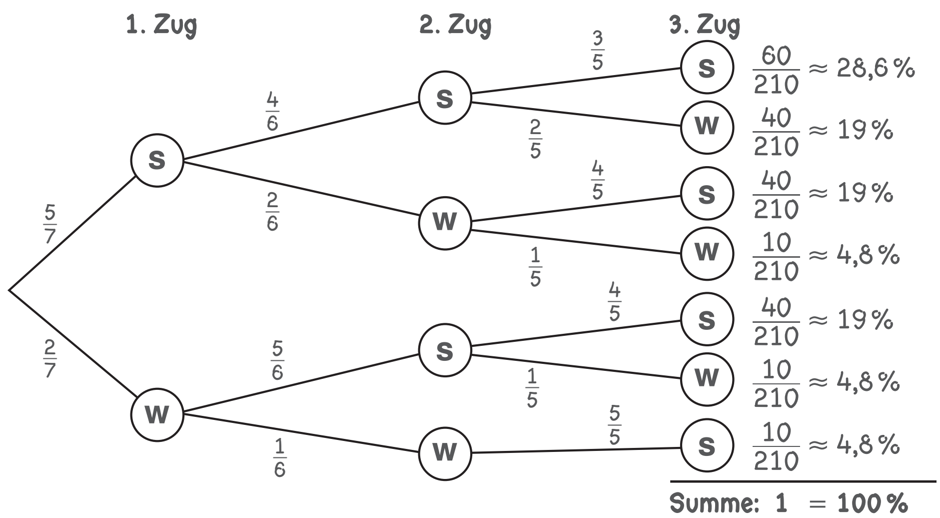
Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1. Als kleiner Rundungsfehler ergibt sich 99,9 %.

P (mindestens eine weiße Kugel) = P (g,w) + P (w,g) + P (w,s) + P (s,w) + P(w,w) = 5,4 % + 5,4 % + 21,4 % + 21,4 % + 10,7 % = **64,3 %**

Oder Rechnung mit der Gegenwahrscheinlichkeit:

P (mindestens eine weiße Kugel) = 100 % – P (keine weiße Kugel) = 100 % – (P(g,s) + P (s,g) + P (s,s)) = 100 % – (7,1 % + 7,1 % + 21,4 %) = 64,4 %

4.



Vorsicht: Der unterste W-Ast fehlt, da die beiden weißen Kugeln schon gezogen wurden.

Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.

P (nur schwarze oder genau eine weiße) = P (s,s,s) + P (s,s,w) + P (s,w,s) + P (w,s,s) = 28,6 % + 19,0 % · 3 = 85,6 %

P (nicht genau eine schwarze) = P (s,s,s) + P (s,s,w) + P (s,w,s) + P (w,s,s) = 28,6 % + 19,0 % · 3 = 85,6 %

Oder Rechnung mit der Gegenwahrscheinlichkeit:

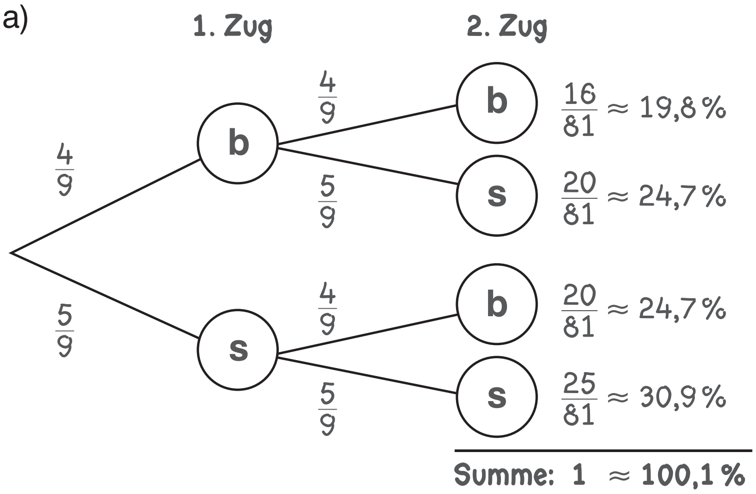
P (nicht genau eine schwarze) = 100 % – P (genau eine schwarze) = 100 % – P (s,w,w) + P (w,s,w) + P (w,w,s) = 100 % – 4,8 % · 3 = 85,6 %

Beide Ereignisse treten mit derselben Wahrscheinlichkeit von 85,6 % auf.

Lösungen: Aufgabensammlung 3

Lösungen zur Aufgabensammlung 1 „mit Zurücklegen“

1. a)

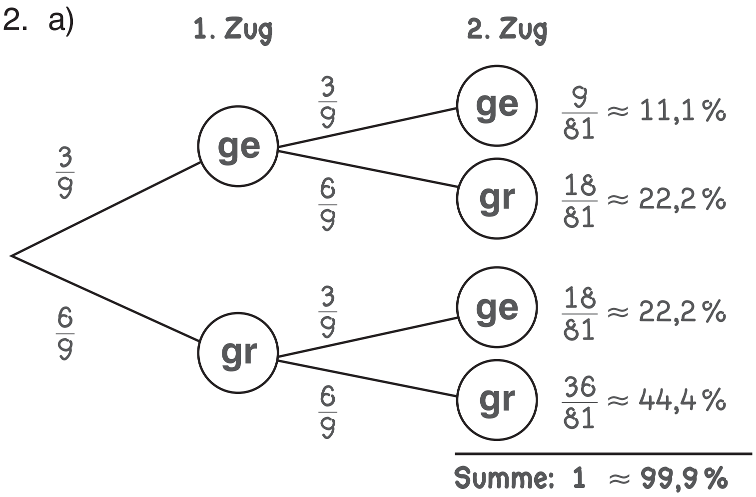


Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1. Als kleiner Rundungsfehler ergibt sich 100,1 %.

b) P (verschiedenfarbige Kugeln) = P (b,s) + P (s,b) = 24,7 % · 2 = 49,4 %

c) Anders als beim Ziehen ohne Zurücklegen verliert man hier häufiger.

2. a)

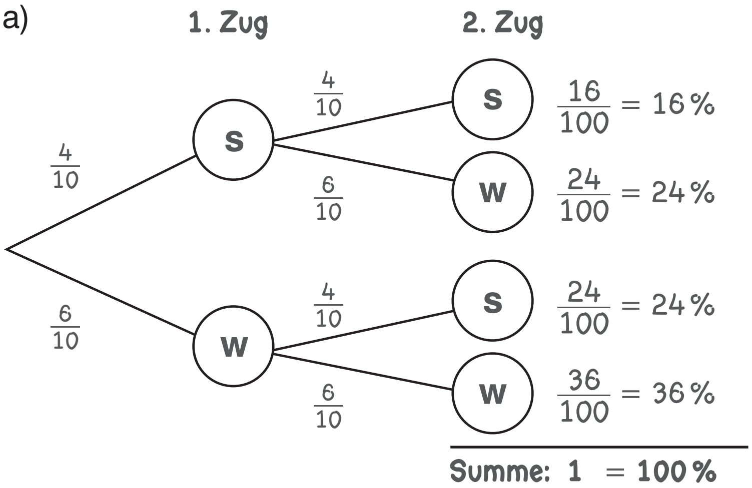


Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1. Als kleiner Rundungsfehler ergibt sich 99,9 %.

b) P (2 gleichfarbige Kugeln) = P (ge,ge) + P (gr,gr) = 11,1 % + 44,4 % = 55,5 %
P(2 verschiedenfarbige Kugeln) = 44,4 %

c) Beim Ziehen ohne Zurücklegen waren die gefragten Wahrscheinlichkeiten gleich groß. Hier würde man auf die gleichfarbigen Ausfälle setzen.

3. a)

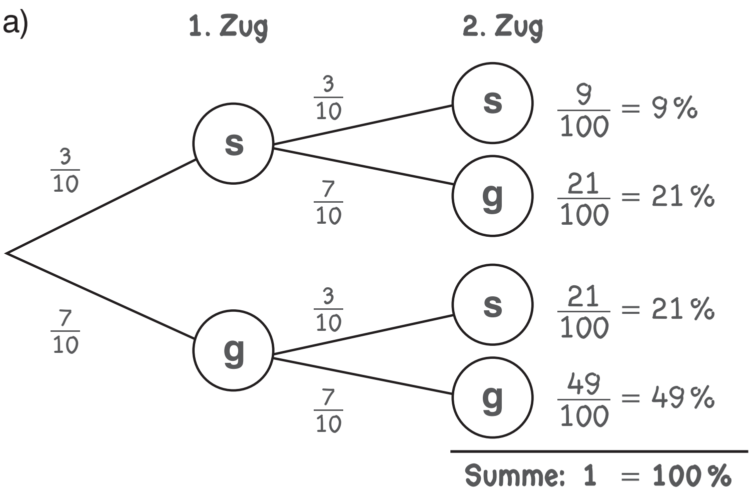


Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.

b) P (genau eine weiße Kugel) = P (s,w) + P(w,s) = 24 % · 2 = 48 %
P (gleichfarbige Kugeln) = P (s,s) + P (w,w) = 16 % + 36 % = 52 %

c) Bei dem Zufallsversuch ohne Zurücklegen lag die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zwei gleichfarbige Kugeln" unter der für das Ergeinis „genau eine weiße Kugel". Hier ist es umgekehrt: „zwei gleichfarbige Kugeln" tritt mit 52 % langfristig häufiger auf als „genau eine weiße Kugel" mit 48 %.

4. a)



Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.

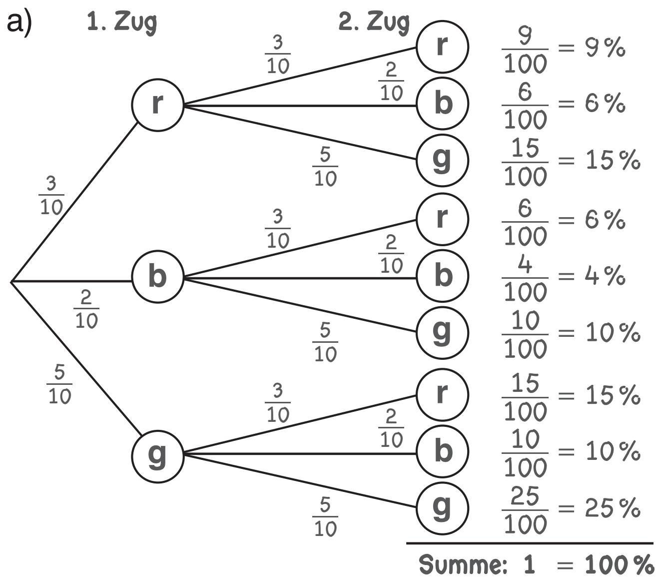
b) P (mindestens eine schwarze Kugel) = P (s,s) + P (s,g) + P (g,s)
= 9 % + 21 % + 21 % = 51 %.
P (genau eine gelbe Kugel) = P (s,g) + P (g,s) = 21 % · 2 = 42 %

c) Genau wie beim Ziehen ohne Zurücklegen ist auch hier die erste Wahrscheinlichkeit höher als die zweite. Das ist in beiden Situationen klar, da das erste Ereignis die beiden Fälle des zweiten Ereignisses und einen weiteren Fall enthält. Allerdings sind beim Ziehen mit Zurücklegen beide Wahrscheinlichkeiten niedriger als beim Ziehen ohne Zurücklegen.

Lösungen: Aufgabensammlung 3

Lösungen zur Aufgabensammlung 2 „mit Zurücklegen“

1. a)

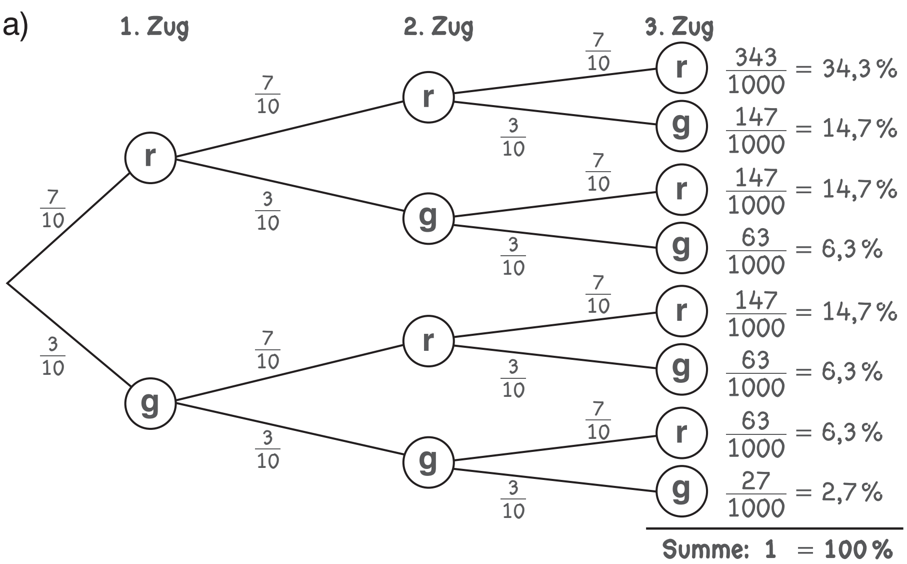


Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.

b) P (2 gleichfarbige Kugeln) = P (r,r) + P (b,b) + P(g,g) = 9 % + 4 % + 25 % = 38 %
P (keine 2 grünen Kugeln) = 1 – P (g,g) = 100 % – 25 % = 75 %.

c) Die Wahrscheinlichkeiten für den ersten Fall (2 gleichfarbige Kugeln) werden im Vergleich zum Ziehen ohne Zurücklegen größer, im zweiten Fall (keine 2 grünen Kugeln) nimmt die Wahrscheinlichkeit ab.

2. a)



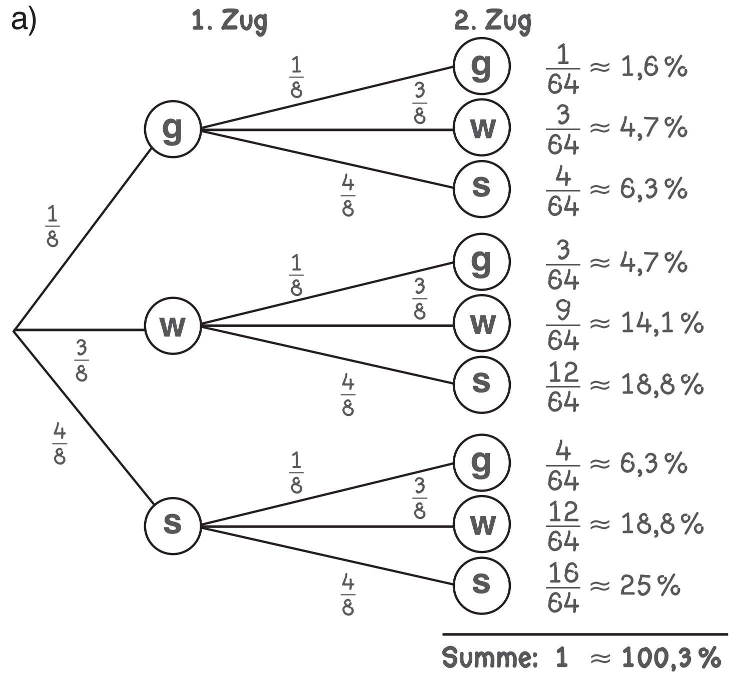
Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1.

b) P (genau eine grüne Kugel) = P (r,r,g) + P (r,g,r) + P(g,r,r)7 = 14,7 % · 3 = 44,1 %. Beim Ziehen ohne Zurücklegen lohnte es sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 52,5 % auf das Ereignis zu setzen. Hier lohnt es sich mit 44,1 %-Wahrscheinlichkeit langfristig nicht.

c) In beiden Zufallsversuchen sind die drei Fälle mit genau einmal grün und die drei Fälle mit genau einmal rot gleichwahrscheinlich. Der Fall „grün“ hat aber mit 17,5 % gegenüber 14,7 % eine höhere Wahrscheinlichkeit, der Fall „rot“ mit 5,8 % gegenüber 6,3 % eine geringere Wahrscheinlichkeit.

Ma5-10_24_20-23_Loesungen.indd 7 26.08.13 14:58

3. a)

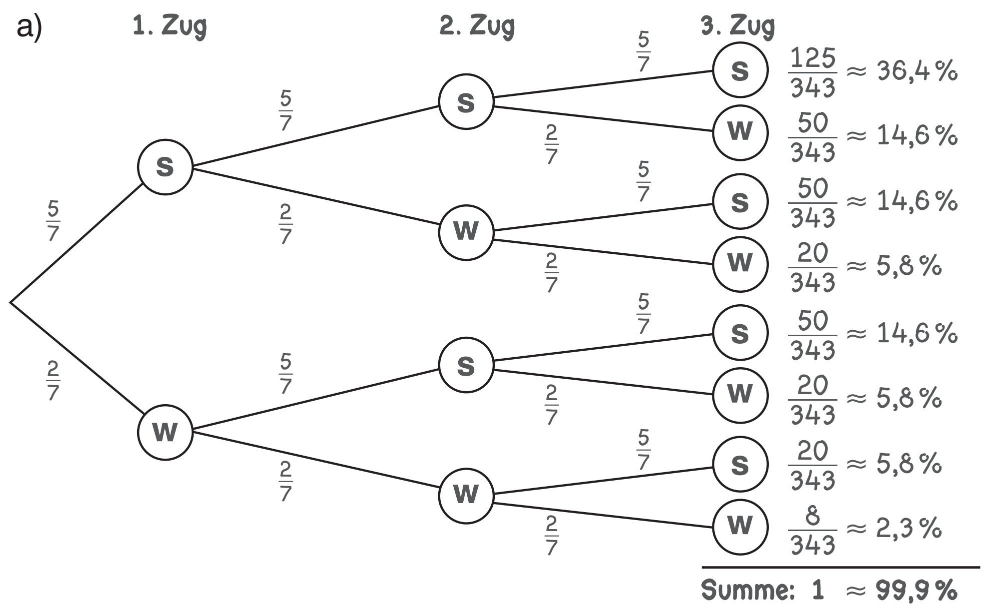


Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1. Als kleiner Rundungsfehler ergibt sich hier 100,3 %.

b) P (mindestens eine weiße Kugel) = 1 − P(keine weiße Kugel) = 1 − (P (g,g) + P (g,s) + P (s,g) + P (s,s)) = 100 % − (1,6 % + 6,3 % + 6,3 % + 25 %) = 60,8 %

c) Obwohl sich ein Fall zusätzlich ergibt, nämlich (g,g), liegt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis hier mit 60,8 % niedriger als beim Ziehen ohne Zurücklegen (64,3 %).

4. a)



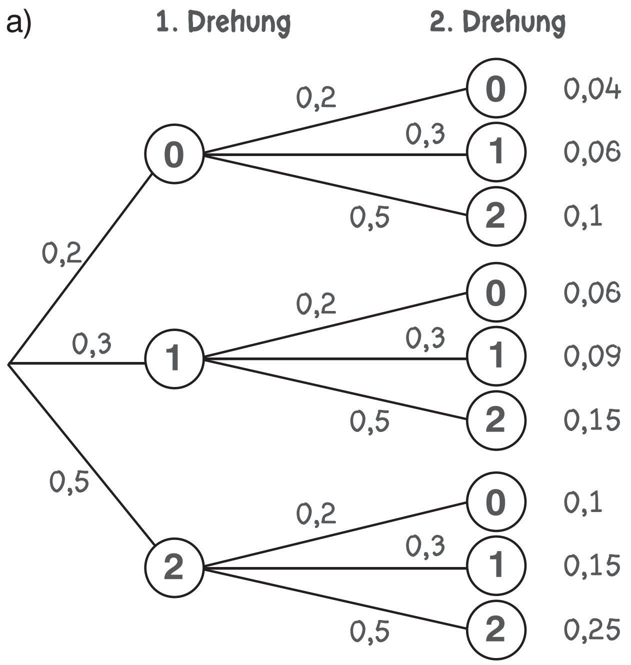
Prüfung des Baumdiagramms: Zueinander gehörende Astwahrscheinlichkeiten und auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben summiert jeweils 100 % bzw. 1. Als kleiner Rundungsfehler ergibt sich hier 99,9 %.

b) P (nur schwarze oder genau eine weiße) = P (s,s,s) + P (s,s,w) + P (s,w,s) + P (w,s,s) = 36,4 % + 14,6 % · 3 = 80,2 %
P (nicht genau eine schwarze) = 1 − P (genau eine schwarze) = 1 − (P (s,w,w) + P (w,s,w) + P (w,w,s)) = 100 % − (5,8 % · 3) = 82,6 %

c) Beim Ziehen ohne Zurücklegen waren die Wahrscheinlichkeiten mit 85,6 % gleich groß, hier unterscheiden sie sich.

Lösungen: Aufgabensammlung 3 (Teilaufgabe 2)

2. a)

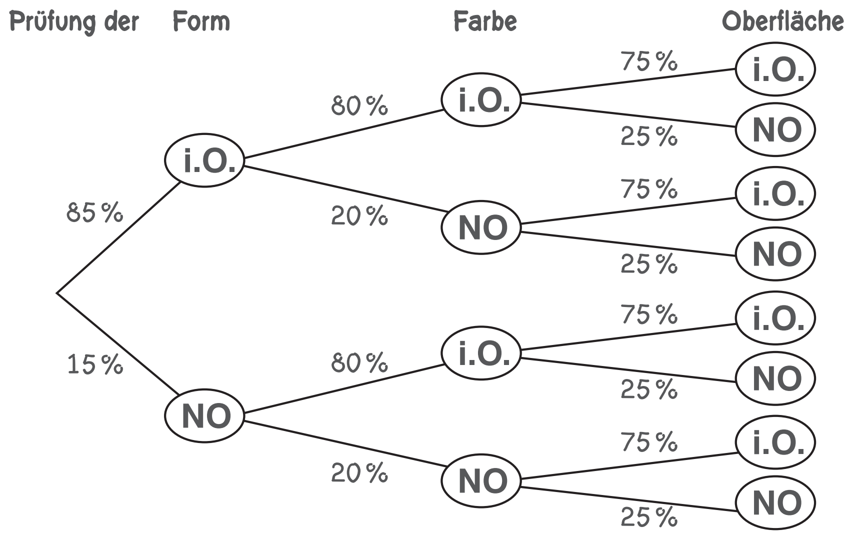


P (verschiedene Zahlen) = 1 – P (gleiche Zahlen) = 1– (P (0,0) + P (1,1) + P (2,2)) = 1 – (0,04 + 0,09 + 0,25) = 1 – 0,38 = 0,62 = 62 %

b) Füllt man eine Urne mit 2 weißen, 3 schwarzen und 5 roten Kugeln, so ergeben sich für den ersten Zug mit $\frac{2}{10} = 20\,\%$, $\frac{3}{10} = 30\,\%$ und $\frac{5}{10} = 50\,\%$ dieselben Wahrscheinlichkeiten wie beim Glücksrad. Man kann die Folgezüge allerdings nur dann mit einem Urnenmodell simulieren, wenn die Kugeln wieder zurückgelegt werden, denn nur dann bleiben die Wahrscheinlichkeiten wie beim Glücksrad konstant.

Lösungen: Aufgabensammlung 4

1. a)



Die Wahrscheinlichkeiten an dem jeweils unteren Ast von zwei zueinander gehörenden Ästen ist in der Aufgabe vorgegeben. Die Wahrscheinlichkeiten am anderen Ast ergibt sich als Ergänzung zu 100 %.

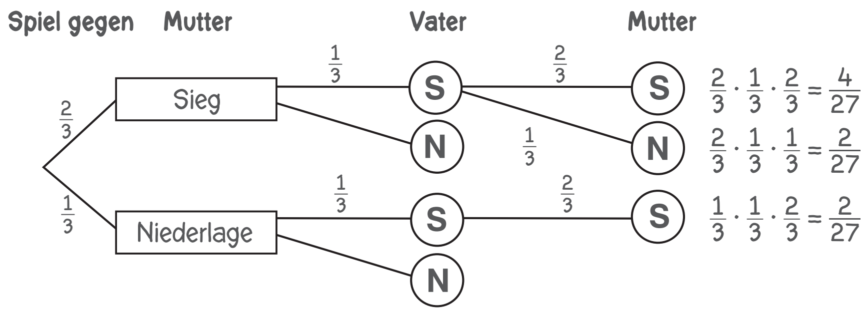
b) P (1. Wahl) = 51 %

c) P (2. Wahl) = P (iO; iO; NO) + P (iO; NO; iO) + P (NO; iO; iO)
= 17 % + 12,75 % + 9 % = 38,75 %

d) Da die Regel „Summe = 100 %“ für alle Pfadwahrscheinlichkeiten zusammen gilt, kann man die Wahrscheinlichkeit für den Ausschuss über die Gegenwahrscheinlichkeit (zu 1. und 2. Wahl) berechnen.
P (Ausschuss) = P (nicht 1. oder 2. Wahl) = 100 % – P (1. oder 2. Wahl)
= 100 % – (51 % + 38,75 %) = 10,25 %

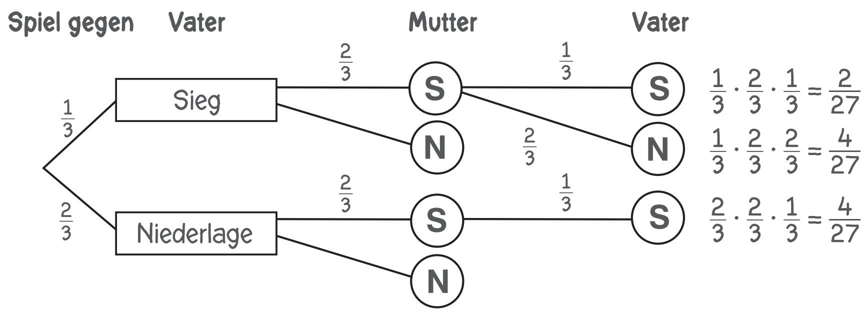
2. Hier sind zwei Spielabfolgen vorgegeben und dafür sind zwei Baumdiagramme anzufertigen. Es sind jeweils nur die erfolgreichen Pfade (E) abgebildet.

1. Antwort:



$$P_{MVM}(E) = \frac{4}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27} \approx 29{,}6\,\%$$

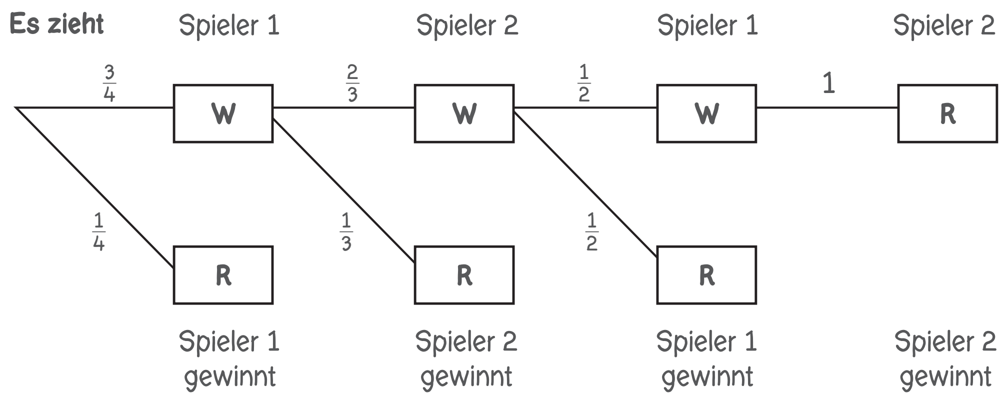
2. Antwort:



$$P_{VMV}(E) = \frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27} \approx 30{,}0\,\%$$

Antwort 2 stimmt: Wenn der Sohn gegen Vater, Mutter, Vater spielt, gewinnt er mit höherer Wahrscheinlichkeit als bei der Reihenfolge Mutter, Vater, Mutter.

3.



P (Spieler 1 gewinnt) = $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

P (Spieler 2 gewinnt) = 1 – P (Spieler 1 gewinnt) = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Oder ausführlich anhand des Baumdiagramms:

P (Spieler 2 gewinnt) = $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Die Antworten stimmen beide nicht, denn die Chancen sind für beide Spiele gleichgroß (50 %).