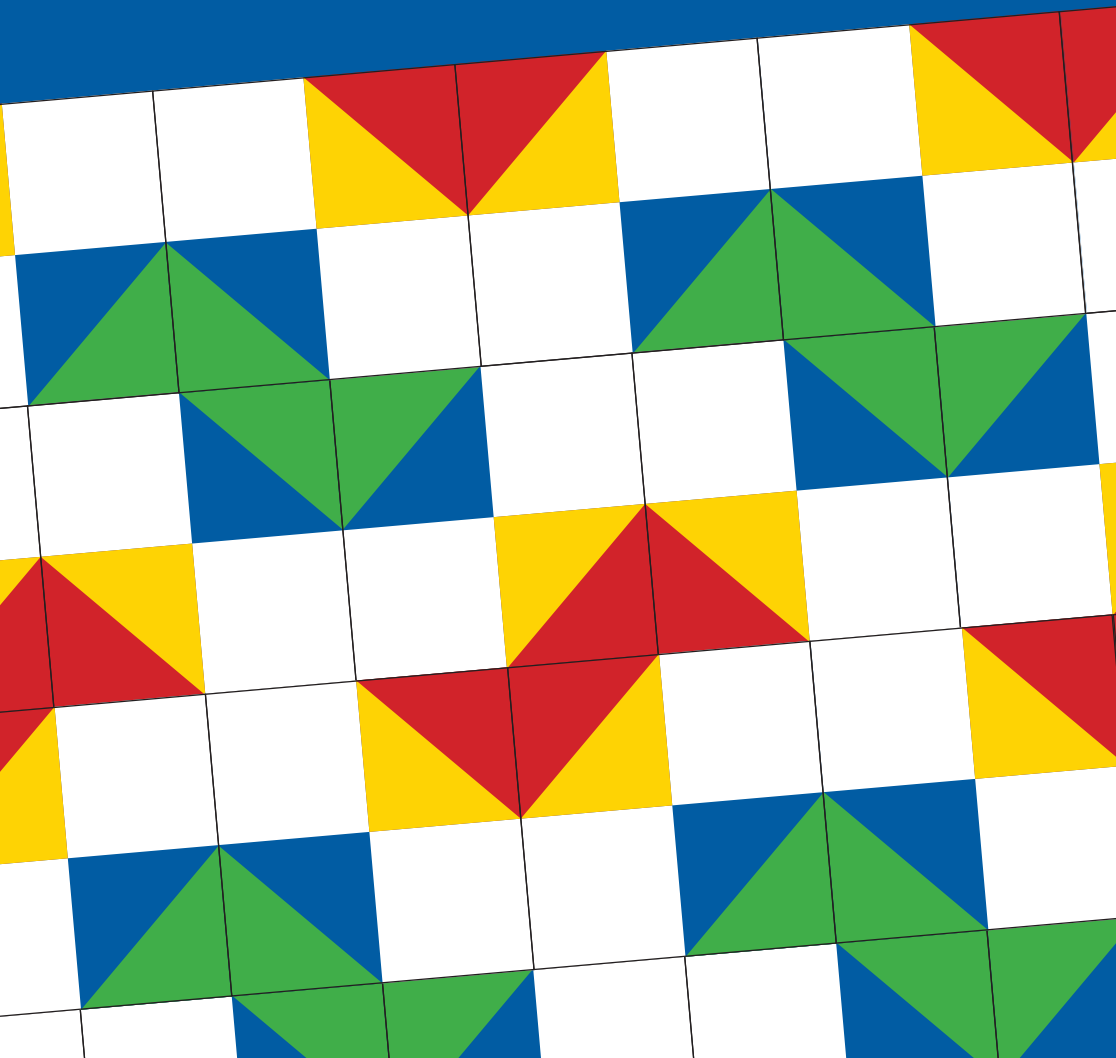


Lehrerkommentar

SILKE RUWISCH

# PARKETTO

Mit Parkettierungen, Formen und Symmetrien experimentieren





## Inhaltsverzeichnis

Das Material	S. 4
Die Aufgabenstellungen	S. 4
Die Lösungskarten	S. 5
PARKETTO im Unterricht	S. 5
Was lernen die Kinder mit PARKETTO?	S. 6
Möglichkeiten der Differenzierung und Erweiterung	S. 8
Der mathematische Hintergrund	S. 11
Kopiervorlagen	S. 13–15

## Das Material

Mit 96 quadratischen Legeplättchen können die Kinder Parkettierungen mit drei verschiedenen Grundmustern erkunden. Jeweils 48 Musterkarten lassen sich für die Parkettierungen A und B verwenden, alle 96 Quadrate finden Verwendung bei Parkettierungen des Musters C.

Die einzelnen Quadrate bei Muster A und B sind achsensymmetrisch bezüglich einer Diagonalen.



Abb. 1: Achsensymmetrische Ausgangsquadrate von Muster A (links) und Muster B (rechts)

Die Quadrate von Muster C weisen dagegen keine Achsensymmetrie, sondern eine Drehsymmetrie um  $180^\circ$  auf. Außerdem gehören zwei verschiedene zueinander achsensymmetrische Ausgangsquadrate zu diesem Muster, je 48 Karten von jedem Typ – leicht aufgrund der verschiedenen Rückseiten zu identifizieren und zu sortieren.

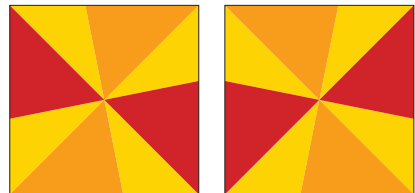


Abb. 2: Zueinander achsensymmetrische Ausgangsquadrate von Muster C

## Die Aufgabenstellungen auf den Karteikarten

Auf 24 Karteikarten werden den Kindern jeweils analoge Aufgabenstellungen zu allen drei Mustern geboten:

- Nachlegen von vorgegebenen Parkettierungen (A1, B1, C1, C2)
- Fortsetzen angefangener Parkettierungen (A2, A3, B2, B3, C3, C4, C5, C6)

- Herstellen von Parkettierungen mit vorgegebenen Teilfiguren, die durch das Zusammensetzen der Ausgangsquadrate entstehen (A4, B4, C7, C8)
- Untersuchen vorgegebener Parkettierungen auf Achsensymmetrie (A5, B5, C9, C10) und Drehsymmetrie (A7, B7, C13, C14)
- Herstellen von achsensymmetrischen (A6, B6, C11, C12) und drehsymmetrischen (A8, B8, C15, C16) Parkettierungen
- Fehler in Parkettierungen finden und reparieren (A9, B9, C17, C18)
- Parkettierungen so umbauen, dass neue Parkettierungen entstehen (A10, A11, B10, B11, C19, C20, C21, C22)
- „Andere“ Parkettierungen legen, z. B. indem zwei Quadrate nicht mit der vollen Seitenlänge aneinander gelegt werden (A12, B12, C23, C24)

## **Die Lösungskarten**

Zu den Karteikarten im Format DIN A5 werden Lösungskarten im DIN A6-Format mitgeliefert, anhand derer die Kinder selbstständig ihre Lösungen überprüfen können. Viele Aufforderungen ermöglichen mehrere Lösungsmöglichkeiten. Auf der Lösungskarte wird eine dieser Möglichkeiten aufgezeigt. Da der Grundbaustein (siehe „Der mathematische Hintergrund“ auf S. 11) beliebig groß sein kann, wurde jeweils diejenige Lösung mit den kürzesten Verschiebungen und somit dem kleinsten Grundbaustein auf der Lösungskarte aufgenommen.

## **PARKETTO im Unterricht**

Die regelmäßige Gestaltung und die große Anzahl der quadratischen Karten haben für die Kinder einen hohen Aufforderungscharakter, so dass sie auch gern ohne die Anregungen auf den Karteikarten frei Muster legen. Dabei lassen die Kinder bereits ihren Sinn für Regelmäßigkeit und Schönheit erkennen und zeigen der Lehrperson gleichermaßen ihre Kreativität wie Strukturierungsfähigkeit.

Die Aufgaben auf den Karteikarten wenden sich in der Ansprache an einzelne Kinder. So können sie sowohl zu Hause als auch in der Schule von den Kindern allein bearbeitet werden und lassen sich gut in Freiarbeitsphasen einbeziehen. Ihre Kommunikationsfähigkeiten bauen die Schülerinnen und Schüler besonders gut aus, wenn sie zu zweit zusammenarbeiten. Im Austausch erhalten die Kinder darüber hinaus weitere Anregungen, sowohl zum Vorgehen bei der Bearbeitung als auch hinsichtlich des Endproduktes. Da das Endprodukt der jeweiligen Arbeit – die fertige Parkettierung – direkt im Anschluss wieder zerstört werden muss, sobald sich die Kinder einer weiteren Aufgabe widmen oder andere Kinder mit PARKETTO arbeiten wollen, kommt dem gegenseitigen Austausch während der Auseinandersetzung eine noch größere Bedeutung zu.

Um der Flüchtigkeit der fertigen Parkettierung zu begegnen, können die Kinder entweder ein Foto anfertigen oder ihnen werden Arbeitsblätter mit „leeren“ Quadraten zur Verfügung gestellt (siehe Kopiervorlagen am Ende des Heftes auf den Seiten 13 bis 15), auf denen sie ihre Ergebnisse zeichnerisch dokumentieren können. Da mathematisch kein zusätzlicher Gewinn entsteht, wenn alle 48 oder gar 96 Karten gezeichnet werden, reicht ein 4×5-Feld leerer Quadrate.

Einige wenige Kinder werden vielleicht rein zeichnerisch arbeiten können und wollen. Diese Kinder zeigen damit, dass sie ein gutes Vorstellungsvermögen besitzen. Sie sollten nicht an ihrem Vorgehen gehindert werden. Allerdings ist das Ziel der Arbeit mit PARKETTO nicht die Ablösung vom Material. Vielmehr stellt gerade das aktive Hantieren mit den Plättchen den großen Reiz für viele Kinder dar, wenngleich ein genaues Arbeiten und somit feinmotorisches Geschick erforderlich sind, um ein ästhetisch anspruchsvolles Ergebnis zu erzielen.

## **Was lernen die Kinder mit PARKETTO ?**

Ein wesentliches Ziel bei der Arbeit mit den Karteikarten und den Quadraten liegt in der genauen Beobachtung und Analyse vorgegebener Muster. Indem die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, die jeweiligen Muster nachzulegen, fortzuführen oder auf bestimmte Merkma-

le hin zu untersuchen, muss das Gesamtbild gedanklich oder probeweise handelnd auseinandergenommen bzw. aus den einzelnen Quadraten zusammengesetzt werden. Wurde die Aufgabenstellung der Karteikarte verstanden, gelingt den Kindern in der Regel die Musterfortsetzung mit den Quadraten in der direkten Handlung sehr schnell. Bevor die Kinder dann allerdings zur Lösungskarte greifen, sollten sie angehalten werden, noch einmal die eigene Parkettierung mit den vorgegebenen Ausschnitten auf der Karteikarte abzugleichen. Die Karteikarten dienen somit nicht nur als Anregung für Aufgabenstellungen, sondern schulen durch den permanenten Vergleich ebenfalls die genaue Wahrnehmung.

Über die Schulung dieser grundlegenden Fähigkeiten hinaus ermöglichen die Karteikarten handelnde Zugänge zu einigen Symmetrien in Parkettierungen, ohne dass auf eine systematische Behandlung abgezielt wird. In zusätzlichen Forschungsaufträgen und gemeinsamen Reflexionsphasen lassen sich allerdings auch erste Merkmale der verschiedenen Parkettierungen herausarbeiten:

- Mit nur einer Grundmusterkarte des Musters C kann man keine achsensymmetrische Parkettierung legen. Wieso eigentlich nicht?
- Wie groß ist der „Grundbaustein“ einer jeweiligen Parkettierung? – Dass dies nicht das entsprechende Ausgangsquadrat sein muss, lässt sich ebenfalls gut an Muster C feststellen, nämlich dann, wenn beide Quadrate Verwendung finden. Aber auch bei Muster A und B können größere Grundbausteine identifiziert werden, indem die Kinder markieren, wann „ein Muster wieder von vorne beginnt“, welche Länge die Verschiebungen also haben.
- Was passiert eigentlich, wenn das Ausgangsquadrat schon mit vielen Symmetrien versehen gestaltet ist, z. B. so wie in Abbildung 3? – Dass sich so nicht mehr verschiedene Parkettierungen legen lassen, Symmetrie also letztlich langweilig werden kann, ist sicher eine Erfahrung wert.

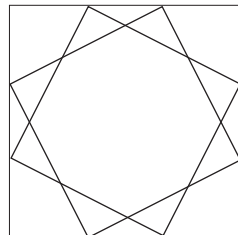


Abb. 3: Mehrfach symmetrisches Ausgangsquadrat

## Möglichkeiten der Differenzierung und Erweiterung

Neben dem freien Legen mit den Karten, bei dem durchaus auch die verschiedenen Musterkarten kombiniert verwendet werden können, und dem Legen nach Aufforderung durch die Karteikarten sind mit PARKETTO weitere – einfachere und anspruchsvollere – Aktivitäten im Unterricht möglich.

### *Nachlegen einfacher Figuren*

Die Quadrate können zunächst für das Nachlegen einzelner in sich geschlossener Figuren, insbesondere bei Muster B, genutzt werden. So können die Schülerinnen und Schüler lernen, die komplexeren Muster auf den Karteikarten zu zerlegen und diese Teile zusammensetzen, um so wieder größere Bausteine für die Parkettierungen zu erhalten (vgl. Abb. 4).

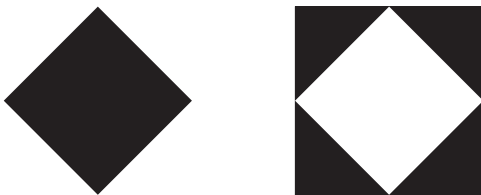


Abb. 4: Einfache, in sich geschlossene Figuren legen

Ebenfalls mit einigen wenigen Quadraten lassen sich „Muster auf Lücke“ legen (vgl. Abb. 5). Dabei handelt es sich gleichfalls um Aufforderungen zur genaueren Analyse von gegebenen Mustern. Allerdings dienen diese nicht der Vorbereitung auf die Arbeit mit den Parkettierungen, bei denen es wichtig ist, dass die Quadrate lückenlos gelegt werden.

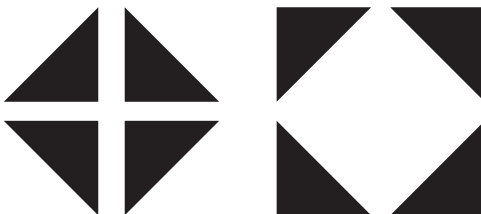


Abb. 5: Muster auf Lücke legen



### *Bandornamente*

Die Quadrate aller drei Muster eignen sich – getrennt oder auch miteinander vermischt –, um Muster im Sinne von Bandornamenten frei zu legen, nachzulegen oder fortzuführen. Durch die Ausdehnung des Musters in lediglich eine Richtung werden neben der jeweiligen Lage der Plättchen stärker die Reihenfolge und Wiederholung, somit die Länge der Verschiebung, in den Fokus gerückt (vgl. einige Vorschläge in Abb. 6).

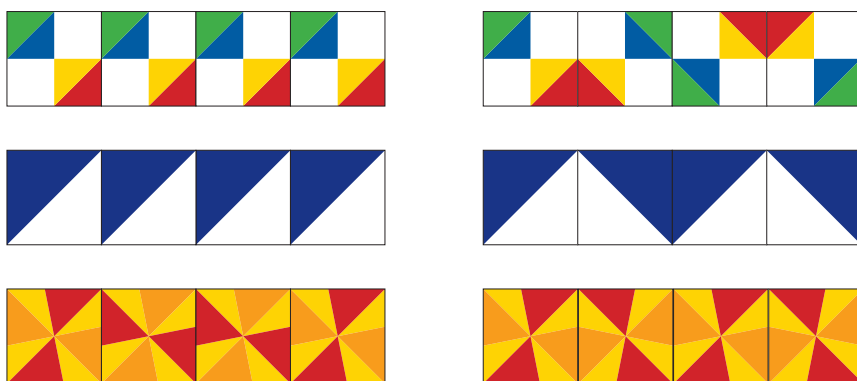


Abb. 6: Bandornamente mit den Musterkarten

### *(Zeichnerische) Arbeitsergebnisse als Vorlagen für andere*

Halten die Schülerinnen und Schüler in der Auseinandersetzung mit den Aufgabenstellungen auf den Karteikarten ihre Arbeitsergebnisse zeichnerisch oder fotografisch fest, so können diese wiederum für die anderen Kinder als Vorlage dienen:

- Die Muster anderer Kinder können die Vorlagen zum Nachlegen ergänzen.
- Achsen- und drehsymmetrische Muster der Schülerinnen und Schüler können für die anderen als Vorlage zum Prüfen auf Achsen- bzw. Drehsymmetrie dienen.
- Verschiedene Aufgaben zum Umbauen von Parkettierungen lassen sich leicht erstellen und diese hinsichtlich des Aufwands zum Umlegen miteinander vergleichen.

- „Andere“ Arten der Parkettierung (vgl. die Karteikarten A 12, B 12, C 23 und C 24) eignen sich besonders, um das gelegte Muster gründlich zu erkunden, die Bauvorschrift zu erkennen, um dann nachlegen zu können.

Doch nicht nur die Arbeitsdokumente der anderen Schülerinnen und Schüler fordern die Kinder weitergehend heraus.

### *Eigene Musterquadrate gestalten*

Gibt man den Kindern die Möglichkeit, eigene quadratische Musterkarten zu gestalten (vgl. z.B. Abb. 7), erfahren sie darüber hinaus noch mehr über die Strukturen von Parkettierungen und können gleichzeitig sehr gut ihre eigene Fantasie und Kreativität zeigen. Außerdem erleben sie sich als aktiv Gestaltende, so dass die entstehenden Parkettierungen mit noch größerem Stolz präsentiert werden.

In der Regel reichen schon zwölf eigene Quadrate aus, um erste Muster und durchaus verschiedene Parkettierungen zu legen. Als Vorlage für eigene Gestaltungen finden Sie auf den Seiten 14 und 15 Kopiervorlagen mit einer oder mit zwei Seitenunterteilungen.

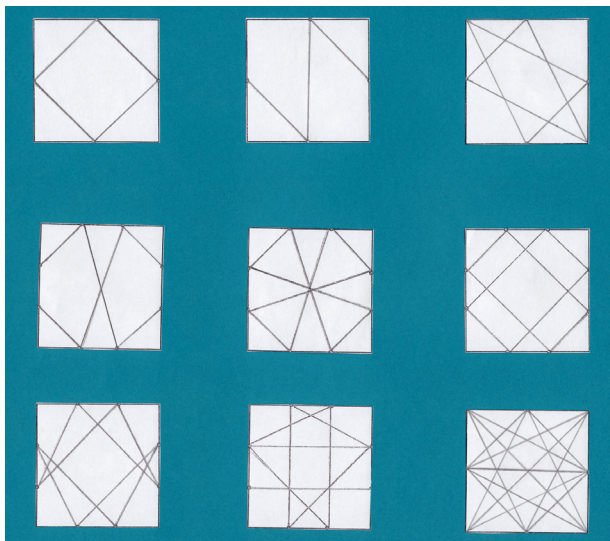


Abb. 7: Kinder gestalten eigene Musterkarten

(aus: Pyroth, Silke (2009): Mit Symmetrien experimentieren. In: Grundschule Mathematik, Heft 22, S. 24–27, hier S. 25.)

### *Parkettierungen mit anderen Grundkarten*

Parkettierungen lassen sich nicht nur aus Quadraten erstellen. Als andere Grundformen eignen sich Dreiecke, Rechtecke und Parallelogramme, Rauten und regelmäßige Sechsecke. Schon mit einfachen einfarbigen Rechtecken mit einem Seitenverhältnis von 2:1 lassen sich vielfältige Parkettierungen legen, wie sie auch als Pflasterungen in der Stadt zu finden sind (vgl. Abb. 8).

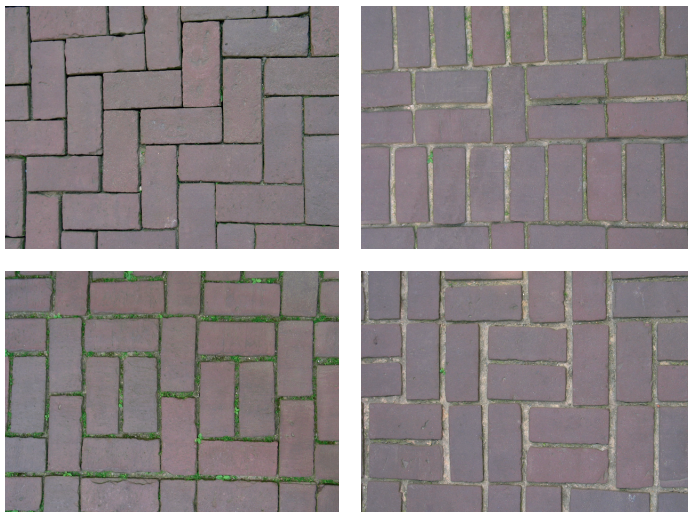


Abb.8: Pflasterungen mit Rechtecksteinen

### **Der mathematische Hintergrund**

Eine Parkettierung ist eine lückenlose Bedeckung der Ebene mit gleichen Grundbausteinen, so dass mindestens zwei verschiedene Verschiebungen (Translationen) Deckabbildungen der Parkettierung sind, d.h. die Parkettierung wieder auf sich selbst abbilden. Zwar lässt sich eine Parkettierung immer nur endlich legen, konstruieren oder zeichnen, so im vorliegenden Fall mit maximal 48 oder 96 Quadraten. Mathematisch muss sie jedoch immer unendlich, also in alle Richtungen fortgesetzt, gedacht werden, da nur dann die Verschiebungen Deckabbildungen sind.

Parkettierungen werden in verschiedene Typen unterteilt, je nachdem, wie viele und welche Symmetrien sie aufweisen. Dabei werden diese Symmetrien maßgeblich durch die Symmetrien des Grundbausteins der Parkettierung mitbestimmt.

Ist der Grundbaustein – wie im Fall von nur einer Karte bei PARKETTO – quadratisch, so lassen sich Parkettierungen mit den meisten Symmetrien legen, vorausgesetzt, dieser Grundbaustein ist selbst symmetrisch gestaltet. Durch die drei verschiedenen Muster auf den vorliegenden Quadraten werden jedoch einzelne Symmetrien ausgeschlossen, z.B. die Achsensymmetrien bezüglich der Seitenhalbierenden des Quadrates bei allen Mustern oder die Drehsymmetrien bezüglich des Mittelpunktes jedes Quadrates bei den Mustern A und B. Zwar lassen sich bei jeder Parkettierung unendlich viele konkrete Verschiebungsmöglichkeiten als Deckabbildung angeben, als grundsätzlich verschiedene Typen oder auch erzeugende Verschiebungen lassen sich immer genau zwei – kürzeste – Verschiebungen identifizieren, die voneinander unabhängig sind. Alle anderen Verschiebungen lassen sich durch Hintereinanderausführen (Verkettung) aus diesen beiden zusammensetzen.

Auch die unendlich vielen Dreh- und Achsensymmetrien einer Parkettierung kategorisiert man in Typen. Besonders einfach ist die Unterscheidung bei Drehzentren, deren Anzahl an Deckabbildungen unterschiedlich ist. In den vorliegenden Parkettierungen sind dies Drehzentren mit zwei ( $0^\circ$  und  $180^\circ$ ) oder vier ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ) Deckabbildungen. Entsprechend werden diese Punkte als Drehzentren 2. bzw. 4. Ordnung bezeichnet. Doch selbst bei Drehzentren derselben Ordnung kann zwischen zueinander äquivalenten und nicht-äquivalenten Drehzentren unterschieden werden. Vereinfacht ausgedrückt: Lassen sich die Drehzentren durch die erzeugenden Verschiebungen aufeinander abbilden, gelten sie als äquivalent, ist dies nicht möglich, als verschieden.

Diese Argumentationen lassen sich ebenso auf Spiegelachsen übertragen. Liegen diese zueinander orthogonal, werden sie auch von Kindern sofort als zwei verschiedene Typen angesehen. Dass parallel verlaufende Spiegelachsen dennoch zu einem unterschiedlichen Typ gehören sollen, ist allerdings in dem Alter kaum einsichtig, ist dies doch einzig über die erzeugenden Verschiebungen begründbar.

## **Impressum**

### **PARKETTO**

Mit Parkettierungen, Formen und Symmetrien experimentieren

© 2011 KALLMEYER LERNSPIELE

Friedrich Verlag GmbH

Im Brande 17

30926 Seelze

Alle Rechte vorbehalten

**Autorin:** Silke Ruwisch

**Grafik:** Dirk Jäger, Katrin Gerstle, Sarah Birkholz

**Redaktion:** Julia Menz

**Druck:** Ludo Fact GmbH

Printed in Germany

**Art.-Nr.:** 13379

[www.kallmeyer-lernspiele.de](http://www.kallmeyer-lernspiele.de)