7.2.3 Drittes Beispiel: Untersuchung einer ganzrationalen Funktion mit Parameter

Methode
eigenverantwortliches arbeitsgleiches Arbeiten in Gruppen

Bei Verständnisschwierigkeiten darf die jeweilige Gruppe den Lehrer oder eine andere Gruppe um Rat fragen. Im Bedarfsfall unterbricht der Lehrer die Gruppenarbeit und löst das aufgetretene Problem gemeinsam mit den Schülern in fragend entwickelnder Form.

Aufgabenstellung
Gegeben ist die ganzrationale Funktionenschar f_a mit:

$$f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 + (12-3a)x; \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar für $|x| \to \infty$ sowie auf Symmetrieeigenschaften.
b) Zeigen Sie, dass die feste Stelle $x_{11} = -3$ und die von a abhängige Stelle $x_{12} = 4 - a$ der Funktionenschar Stellen mit waagerechter Tangente sind. Für welche Werte des Parameters a ist sowohl die Stelle $x_{11} = -3$ als auch die Stelle $x_{12} = 4 - a$ Abszisse von Hochpunkten, für welche Werte Abszisse von Tiefpunkten?
c) Zeigen Sie, dass alle Funktionen der Schar genau einen Wendepunkt besitzen. Für welchen Wert des Parameters a besitzt eine Funktion der Schar einen Sattelpunkt? Welche Konsequenz hat die Existenz dieses Sattelpunkts für die Extrempunkte der Funktion dieser Schar?
d) Für welchen Wert des Parameters a hat eine Funktion der Schar einen Tiefpunkt mit der Abszisse $x_{12} = 4 - a$, dessen Funktionswert maximal ist?
e) Für die Nullstellen der Funktionenschar gilt:

$$x_{01,02} = \frac{3}{4}(1-a) \pm \frac{1}{4}\sqrt{9a^2 - 162a + 585}$$

Skizzieren Sie unter Bezugnahme auf diese Nullstellenbeziehung sowie auf die bisherigen Rechenergebnisse den ungefähren Verlauf des Graphen der Funktion, die einen Sattelpunkt besitzt, und zwei weiterer Graphen Ihrer Wahl, die sich aufgrund bestimmter Parameterwerte a in ihrem Verlauf deutlich unterscheiden.

Präsentation
Verschiedene nach dem Zufallsprinzip bestimmte Schüler übertragen die von ihrer Gruppe durchgeführten Rechnungen an die Tafel und erklären bzw. begründen die Verfahrensweise.

zu a

Tafelanschrift

Untersuchung der Funktionen der Schar für |x| → ∞:

$x \to \infty \Rightarrow -\frac{1}{3}x^3 \to -\infty \Rightarrow f_a(x) \to -\infty$ für jeden Wert von a

$x \to -\infty \Rightarrow -\frac{1}{3}x^3 \to +\infty \Rightarrow f_a(x) \to +\infty$ für jeden Wert von a

Untersuchung der Funktionenschar auf Symmetrieeigenschaften

Das Polynom der Funktionenschar f_a besitzt weder x-Potenzen mit ausschließlich geraden noch ausschließlich ungeraden Exponenten. Folglich ist keine Funktion der Schar achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

zu b

Tafelanschrift

Ableitungen

$f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 + (12-3a)x;\quad a \in \mathbb{R}$

$f_a'(x) = -x^2 + (1-a)x + (12-3a)$

$f_a''(x) = -2x + (1-a)$

$f_a'''(x) = -2 = \text{konst.}$

Extrempunkte

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes:

$f_a'(x) = -x^2 + (1-a)x + (12-3a) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (1-a)x = 12 - 3a \quad \overset{\text{Quadr. Erg. (bzw. Anwend. der Lösungsformel)}}{\Leftrightarrow}$

$\left(x - \frac{1-a}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{4} + 12 - 3a = \frac{1-2a+a^2+48-12a}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1-a}{2}\right)^2 = \frac{(a-7)^2}{4} \Rightarrow \left|x - \frac{1-a}{2}\right| = \frac{a-7}{2}$

$\Rightarrow x_{11} = \frac{1-a}{2} + \frac{a-7}{2} = -3 \vee x_{12} = \frac{1-a}{2} - \frac{a-7}{2} = 4-a$

Die feste Stelle $x_{11} = -3$ und die von a abhängige Stelle $4-a$ erfüllen die notwendige Bedingung für Extremstellen und sind deshalb Stellen mit waagerechter Tangente.