7 Funktionsuntersuchung ganzrationaler Funktionen

7.1 Grundlagen (Stoffanalyse und methodisch didaktische Anregungen)

1. Stunde

Vorbemerkung

Unter Bezugnahme auf die notwendigen Bedingungen für Null-, Extrem- und Wendestellen und der hieraus resultierenden Gleichungen gewinnen wir an Hand deren Lösungsmengen die Nullstellen sowie die Abszissen von Extrem- und Wendepunkten der zu untersuchenden Funktion.

Da die Schüler bezüglich der hier relevanten ganzrationalen Funktionen die Lösungsmengen von Potenzgleichungen höheren Grades ermitteln sollen, jedoch nur mit der Lösung linearer und quadratischer Gleichungen ermitteln können, lässt sich bei Kenntnis einer oder mehrerer Lösungen mit Hilfe einer oder mehrerer Polynomdivisionen der Gesamtpolynom als Produkt aus linearen und quadratischen bzw. biquadratischen Gleichungstermen darstellen. Dann besteht die Möglichkeit, an Hand dieses Produkts, das den Wert null besitzt, durch Lösung linearer und quadratischer bzw. biquadratischer Einzelgleichungen die Gesamtlösungsmenge zu ermitteln.

Falls dieses Verfahren nicht anwendbar ist, lassen sich mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens (s. 1. Teilband, Kap. 3.2.2) und insbesondere des noch zu behandelnden schneller konvergierenden *Newton*-Verfahrens Näherungswerte der Lösungen bestimmen.

Manchmal stellt sich die Frage nach der Gleichung der Tangente sowie der hierzu orthogonalen Normalen an einer bestimmten Stelle x_0, beispielsweise der Gleichung der Wendetangente sowie der Normalen im Wendepunkt. Deshalb ist es sinnvoll, die allgemeingültige Gleichung der Tangente und der Normalen im Berührpunkt $B(x_0 | f(x_0))$ aufzustellen, um durch Einsetzen der maßgebenden Werte für x_0, $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ in die allgemeingültigen Gleichungen schnell und effektiv die jeweils konkreten Gleichungen zu gewinnen.

Ein wichtiger Schritt einer jeden Funktionsuntersuchung ist die Überprüfung des Verhaltens der Funktion für $|x| \to \infty$. Speziell bei ganzrationalen Funktionen gilt es zu zeigen, dass allein das Glied mit der höchstvorkommenden x-Potenz das Verhalten der Funktion für $|x| \to \infty$ steuert.

Zudem sollte gezeigt werden, dass ganzrationale Funktionen, deren x-Potenzen ausschließlich geradzahlige Exponenten haben, achsensymmetrisch zur y-Achse sind, während ganzrationale Funktionen mit rein ungeradzahligen Exponenten punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

Im Folgenden werden diese Grundlagen im Vorfeld der Funktionsuntersuchung in Form einer Stoffanalyse in Kombination mit methodisch didaktischen Anregungen und Hinweisen erarbeitet. Wir beginnen mit dem Aufstellen der Tangenten- und Normalengleichung.

7.1.1 *Die Gleichung der Tangente und der Normalen an der Stelle x_0 einer Funktion f*

Aufstellen der allgemeinen Tangentengleichung:

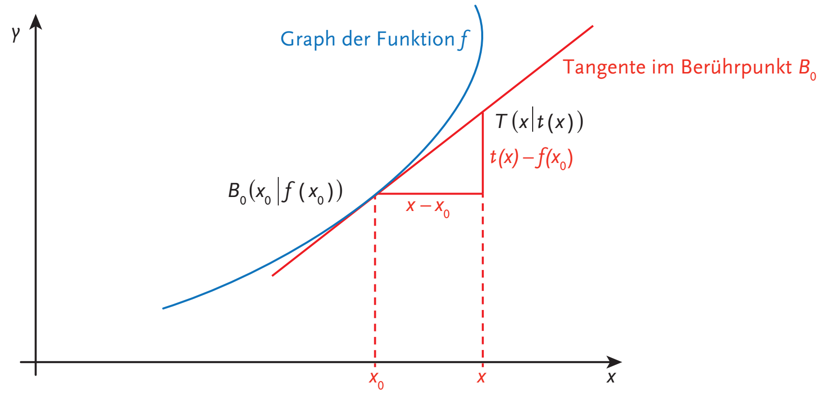


Abb. 7.1

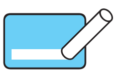
Eine Tangente t berühre den Graph der Funktion f im Berührpunkt $B_0(x_0|f(x_0))$. $T(x|t(x))$ sei ein beliebiger Punkt der Tangente t.
Für die Steigung der Tangente t, die den Graph der Funktion f im Berührpunkt $B_0(x_0|f(x_0))$ berührt gilt: $m_t(x_0) = f'(x_0)$. Diese Steigung lässt sich auch unter Bezugnahme auf das Steigungsdreieck mit der waagerechten Kathete $\Delta x = x - x_0$ und der senkrechten Kathete $\Delta y = t(x) - f(x_0)$ als Differenzenquotient darstellen (s. Abb. 7.1) darstellen:

$$m_t(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \text{(Gl. 1)}$$

Da der beliebig gewählte Punkt $T(x|t(x))$ alle Punkte der Tangente t und demnach der Funktionswert $t(x)$ alle Funktionswerte der Tangente repräsentiert, lösen wir Gl. 1 nach $t(x)$ auf, um die Gleichung der Tangente durch den Berührpunkt $B_0(x_0|f(x_0))$ des Graphen der Funktion f zu gewinnen:

$$\frac{t(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow t(x)-f(x_0) = f'(x_0)\cdot\left(x-x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \text{(Gl. 2)}$$



Tafelanschrift

Satz: $B_0(x_0|f(x_0))$ sei ein Punkt des Graphen der in x_0 differenzierbaren Funktion f. Dann gilt für die Gleichung der Tangente durch den Punkt B_0 der Funktion f: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Aufstellen der Normalengleichung: