4.2 Die 1. Ableitung $f'(x_0)$ als Steigung der Tangente an der Stelle x_0 einer Funktion f

3./4. Stunde

Stundenbild

1. Vorbemerkung

Die vollständige Einführung in diese Thematik, einschließlich der Definition der Tangentensteigung als Grenzwert des Differenzenquotienten bzw. der Sekantensteigung sowie der Bearbeitung typischer Aufgaben wird sicherlich den Zeitrahmen einer Unterrichtsstunde deutlich übertreffen. Deshalb sollte bereits bei der Unterrichtsplanung eine mögliche Zäsur in Erwägung gezogen werden.
Um jedoch der Ganzheitlichkeit der Einführung in die Differenzialrechnung gerecht zu werden, ist der vollständige hier angestrebte Kompetenzerwerb genau einer Unterrichtsstunde zugeordnet.

2. Vorbemerkung

Da der Begriff „Tangente" bisher fast ausschließlich im Zusammenhang mit der Kreislehre der Mittelstufe zur Sprache kam, ist es sinnvoll, diesen Begriff im Rahmen der Hausaufgaben in Erinnerung rufen zu lassen. Zugleich wird damit wird den Schülern bewusst gemacht, dass die Tangente als Graph einer linearen Funktion mit der Steigung m_t in der kommenden Stunde eine wichtige Rolle spielen wird.
Außerdem sollten die Themen „Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$" (siehe 1. Teilband, Kap. 2.1) sowie „Grenzwertberechnung unter Anwendung der Grenzwertsätze" (siehe 1. Teilband, Kap.2.3.2) wiederholt werden.

Die Schüler erwerben folgende inhaltliche sowie prozessbezogene mathematische Kompetenzen:

- Sie erkennen, dass die lokale Steigung eines Steilhangs, dessen Längsschnitt in guter Näherung durch den Graphen der Funktion $H(x) = 0{,}0000025 \cdot x^3$ repräsentiert wird, an der Stelle $x = 600$ identisch mit der Steigung $m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Tangente im Punkt $P_0(600|H(600))$ des Graphen dieser Funktion ist.
- Sie erkennen, dass die Steigung der Tangente durch einen festen Punkt $P_0(x_0|H(x_0))$ dieser Funktion $H(x)$ der Grenzwert der Steigung der Sekante durch diesen Punkt P_0 und einen verschiebbaren Punkt $Q(x_0 + h|H(x_0 + h))$ ist, wenn der bewegliche Punkt Q beliebig nahe an den festen Punkt P_0 herangerückt wird.
- Sie erkennen, dass sich genau dann die Steigung der Tangente durch den festen Punkt P_0 als Grenzwert der Sekantensteigung bzw. des Differenzenquotienten $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{H(x_0 + h) - H(x_0)}{h}$ äußert, wenn die Länge der waagerechten Kathete $\Delta x = h$ des Steigungsdreiecks der Sekante durch den festen Punkt P_0 und den verschiebbaren Punkt Q gegen den Wert 0 strebt.
- Sie sind in der Lage, aufgrund der bisherigen Erkenntnisse die Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung bzw. des Differenzenquotienten inhaltlich wie folgt zu definieren: Existiert ein (eindeutiger) Grenzwert des Differenzenquotienten $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{H(x_0 + h) - H(x_0)}{h}$ für $h \to 0$, ist dieser Grenzwert die Steigung $m_t(x_0)$ der Tangente der Funktion $H(x)$ an der Stelle x_0 bzw. im Berührpunkt $P_0(x_0|H(x_0))$:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{H(x_0+h)-H(x_0)}{h}\right]=m_t(x_0)$$ (Falls ein Grenzwert existiert.)

- Unter Bezugnahme auf diese Definition der Tangentensteigung als Grenzwert des Differenzenquotienten gelingt es den Schülern, durch Einsetzen des Funktionsterms der Funktion $H(x) = 0{,}0000025 \cdot x^3$ des Einführungsbeispiels die Steigung der Tangente $m_t(x_0)$ an jeder Stelle x_0 der Funktion $H(x)$ darzustellen.
- Sie erkennen, dass sich die Steigung der Tangente an jeder Stelle x_0 der Funktion $H(x)$ als Funktionsgleichung $m_t(x_0) = 0{,}0000075x_0^2$ äußert, weshalb sich die vorläufige Bezeichnung „Tangentensteigungsfunktion“ anbietet.
- Sie sind in der Lage, durch Einsetzen der Stelle $x = 600$ (m) in diese „Tangentensteigungsfunktion“ die lokale Steigung an der Stelle $x = 600$ (m) zu berechnen.
- Die Schüler erkennen, dass die bezüglich der Funktion $H(x)$ gewonnene Definition der Tangentensteigung als Grenzwert des Differenzenquotienten repräsentativen Charakter besitzt und auf jede beliebige Funktion $f(x)$ übertragen werden kann, sodass gilt:

  $$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]=m_t(x_0)$$
- Sie erhalten die Information, dass die Tangentensteigung der Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x_0 als Grenzwert des Differenzenquotienten bzw. der Sekantensteigung als „erste Ableitung“ $f'(x_0)$ der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 bezeichnet wird:

  $$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]=f'(x_0)=m_t(x_0)$$
- Die Schüler erkennen, dass sich die erste Ableitung an jeder beliebigen Stelle x_0 der Definitionsmenge der Funktion $f(x)$ als Funktion, der 1. Ableitungsfunktion $f'(x_0)$, äußert.
- Sie werden darüber informiert, dass die erste Ableitung auch als Differenzialquotient $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$ (dy nach dx, an der Stelle x_0) bezeichnet wird, weshalb man die hier relevante Gesamtthematik als „Differenzialrechnung“ bezeichnet.
- Aufgrund des schon vorhandenen Wissens, dass sich der Differenzenquotient bzw. die Sekantensteigung in zwei Formen darstellt, ziehen die Schüler den Schluss, dass sich auch die 1. Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten auf zwei Arten definieren lässt:

  $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right] \text{ und } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$
- Die Schüler sind in der Lage, unter Bezugnahme auf die Definition die 1. Ableitungsfunktion konkreter Funktionen f herzuleiten und mit Hilfe der 1. Ableitungsfunktion die Steigungen von Tangenten an vorgegebenen Stellen der jeweiligen Funktion f zu berechnen.

4.2.1 *Einführung in die Thematik: Die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 einer Funktion H*

Anfangsmethode
fragend-entwickelnde Methode des Frontalunterrichts

Der Lehrer wählt als Einstieg folgendes praktisches Beispiel:

In einer Wintersportgemeinde plante man, einen neuen Skilift zu bauen. Mehrere Abhänge standen zur Diskussion. Grundvoraussetzung für den Bau des Lifts sollte ein Höhenunterschied zwischen Tal- und Bergstation von ca. 500 m sein. Aus Erfahrung wusste man jedoch, dass der letzte