3 Stetige Funktionen

3.1 Grenzwertdefinition der Stetigkeit

1. Stunde

Stundenbild

Vorbemerkung

Die hier präferierte Grenzwertdefinition der Stetigkeit ist für die Schüler leichter verständlich als die *Cauchy*-Definition, die auf einer ε-Umgebung einer betrachteten Zahl x_0 und einer hierzu „passenden" δ-Umgebung des Funktionswert $f(x_0)$ basiert. Zudem lassen sich Funktionen auf der Grundlage der Grenzwertdefinition verhältnismäßig einfach auf Stetigkeit überprüfen, was bei einer Überprüfung mittels *Cauchy*-Definition nicht immer der Fall ist. Auch der später zu behandelnde Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit ist mit Hilfe der Grenzwertdefinition leichter nachvollziehbar und beweisbar.

3.1.1 Die Kriterien der Stetigkeit einer Funktion f(x) an der Stelle x_0

Die Schüler erwerben folgende inhaltliche und prozessbezogene mathematische Kompetenzen:

- Die Funktion mit $f(x)=\frac{-\frac{1}{10}x^3+6x^2-120x+800}{x-20}$ besitzt für $x\to 20$ den Grenzwert 0, jedoch wegen der Definitionslücke $x = 20$ keinen Funktionswert $f(20)$.
- Die Funktion mit $f(x)=-\frac{1}{10}x^2+4x-40$ besitzt für $x\to 20$ ebenfalls den Grenzwert 0.

  Da diese Funktion jedoch keine Definitionslücke besitzt, hat sie auch für $x = 20$ einen Funktionswert, nämlich den Funktionswert $f(20) = 0$. Der Grenzwert für $x\to 20$ existiert und stimmt mit dem Funktionswert $f(20)$ überein.
- Nicht nur für die Stelle $x = 20$, sondern für jede Stelle x_0 der Definitionsmenge der Funktion $f(x)=-\frac{1}{10}x^2+4x-40$ existiert für $x\to x_0$ ein Grenzwert, der mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt.
- Um den Graphen der Funktion mit $f(x)=-\frac{1}{10}x^2+4x-40$ zu zeichnen, könnte man in das Koordinatensystem eingetragene Punkte kontinuierlich miteinander verbinden: Den Graphen „*stetig*" durchzeichnen, ohne den Stift abzusetzen.
- Aufgrund der o. a. Eigenschaften bezeichnet man die Funktion mit $f(x)=-\frac{1}{10}x^2+4x-40$ als **stetige Funktion** innerhalb der gesamten Definitionsmenge.
- Die Funktion mit $f(x)=\frac{-\frac{1}{10}x^3+6x^2-120x+800}{x-20}$ ist an der Stelle $x = 20$ unstetig, da zwar ein Grenzwert für $x\to 20$, jedoch kein Funktionswert $f(20)$ existiert.
- Anhand der gewonnenen Eigenschaftenstellen sind die Schüler in der Lage, die Stetigkeit jeder beliebigen Funktion $f(x)$ an der jeweils betrachteten Stelle x_0 zu definieren:

Grenzwertdefinition der Stetigkeit

Konvergiert eine Funktion $f(x)$ für $x \to x_0$ gegen einen Grenzwert g und existiert an der Stelle x_0 ein Funktionswert, der mit dem Grenzwert für $x \to x_0$ übereinstimmt, ist die betrachtete Funktion an der Stelle x_0 stetig: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right) = g = f(x_0)$

Unterrichtsschritte

Anfangsmethode

Lehrervortrag

Der Lehrer

nimmt Bezug auf das einführende Experiment der 1. Stunde der Grenzwertbetrachtung: Durch Auswertung eines einführenden Experiments haben wir erkannt, dass die Bahnkurve einer Kugel, die unter einem bestimmten Winkel gegen die Horizontale abgeschossen wird, in ausreichender Näherung mit Hilfe des Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 4x - 40$ reproduziert werden kann; insbesondere, dass der Hochpunkt $H(20|0)$ des Graphen identisch mit dem Hochpunkt der realen Bahnkurve ist.

Wir haben weiterhin erkannt, dass auch der Graph der Funktion $f(x) = \frac{-\frac{1}{10}x^3 + 6x^2 - 120x + 800}{x - 20}$ bis auf den Punkt $H(20|0)$ die reale Bahnkurve wiedergibt.

Methodenwechsel

zum eigenverantwortlichen Arbeiten in Gruppen

Der Lehrer erteilt den Schülern den Auftrag,

den Unterschied zwischen beiden Funktionen und deren Graphen herauszuarbeiten.

Im Bedarfsfall lenkt der Lehrer die Diskussion der Schüler oder unterstützt ihre Argumente in Form von Denkanstößen oder Impulsen.

Präsentation

Ein nach dem Zufallsprinzip bestimmter Schüler einer Gruppe gibt die Überlegungen der Gruppe wieder. Der Lehrer ergänzt die Ausführungen des präsentierenden Schülers, falls er dies für notwendig erachtet.

Mögliche Schüleraussage:

Das Element $x = 20$ der Funktion mit $f(x) = \frac{-\frac{1}{10}x^3 + 6x^2 - 120x + 800}{x - 20}$ ist nicht definiert. Folglich existiert für $x = 20$ kein Funktionswert, sodass im Graphen eine Lücke entsteht, die jedoch verschwindend klein ist, da für