1.2 Typische Aufgaben zu konvergenten Folgen

Stundenbild

2. Stunde

Methode
Eigenverantwortliche Gruppenarbeit in Kombination mit der fragend-entwickelnden Methode des Frontalunterrichts

Der Lehrer
trifft die Entscheidung, ob bzw. wann er bei auftauchenden Verständnisfragen die Gruppenarbeit unterbricht, um die Voraussetzungen für die weitere Gruppenarbeit zu gewährleisten.

1. Aufgabe

Gegeben sei die Folge $a_n = \dfrac{2n^2 + n}{n^2}$.

a) Untersuchen Sie den Monotonieverlauf der Folge!
b) Zeigen Sie zunächst auf empirischem Wege, dass die Folge eine konvergente Folge ist. Formen Sie hierzu den Folgenterm äquivalent so um, dass sich ein Grenzwert vermuten lässt.
c) Beweisen Sie den vermuteten Grenzwert, indem Sie auf die Definition des Folgengrenzwerts Bezug nehmen, Wählen Sie hierzu den ε-Wert 0,1.
d) Zeichnen Sie den Folgegraphen.

Präsentation
Ein nach dem Zufallsprinzip bestimmter Schüler einer Gruppe überträgt die von der Gruppe durchgeführte Rechnung an die Tafel und erklärt bzw. begründet die Verfahrensweise.

zu 1a

Tafelanschrift
Erklärungen stichwortartig

Folge $a_n = \dfrac{2n^2 + n}{n^2}$

Streng monoton wachsender Verlauf: Jedes nachfolgende Folgenglied ist größer als das jeweils vorhergehende: $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0$
Streng monoton fallender Verlauf: Jedes nachfolgende Folgenglied ist kleiner als das jeweils vorhergehende: $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0$

Überprüfung:

$$\frac{2(n+1)^2 + (n+1)}{(n+1)^2} - \left(\frac{2n^2 + n}{n^2}\right) \overset{DG}{=} \frac{2(n+1)^2}{(n+1)^2} + \frac{n+1}{(n+1)^2} - \left(\frac{2n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{n+1} - \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Die Folge ist streng monoton fallend.

zu 1b

Tafelanschrift

Empirische Bestimmung des Grenzwerts
Wir formen den Folgenterm unter Anwendung des DG um:

$$a_n = \frac{2n^2 + n}{n^2} \overset{DG}{=} 2 + \frac{1}{n}$$

Plausibilitätsbetrachtung:
Wenn n gegen unendlich strebt, strebt der Quotient $\frac{1}{n}$ gegen 0, folglich der Gesamtterm $2 + \frac{1}{n}$ gegen die Zahl 2.

zu 1c

Tafelanschrift

Beweis des Grenzwerts 2
Es gilt nachzuweisen, dass unendliche viele Folgenglieder innerhalb der $\varepsilon = 0{,}1$-Umgebung des vermuteten Grenzwerts $g = 2$ und nur endlich viele außerhalb dieser Umgebung liegen:

Allgemein gilt für die $\varepsilon = 0{,}1$-Umgebung:

$|a_n - g| < \varepsilon = 0{,}1 \Leftrightarrow a_n > g - 0{,}1 \vee a_n < g + 0{,}1$

Da es sich um eine monoton fallende Folge handelt, können die Folgenglieder im Falle der Existenz eines Grenzwerts nur in der oberen Halbumgebung des vermuteten Grenzwerts $g = 2$ liegen. Dann ist nur die Ungleichung $a_n < g + 0{,}1$ relevant:

$$a_n < g + 0{,}1 \overset{\text{hier}}{\Leftrightarrow} \frac{2n^2 + n}{n^2} < 2 + 0{,}1 \Leftrightarrow 2n^2 + n < 2{,}1n^2 \Leftrightarrow -0{,}1n^2 + n < 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 10n > 0 \overset{\text{quadr. Ergänzung}}{\Leftrightarrow} (n-5)^2 > 25 \Rightarrow |n-5| > 5$$

$$\Rightarrow n - 5 > 5 \vee n - 5 < -5 \Rightarrow n > 10 \vee \quad (n < 0 - \text{nicht relevant})$$

Ab dem Folgeglied a_{11} liegen alle Folgeglieder innerhalb der $\varepsilon = 0{,}1$-Umgebung der Zahl 2. Folglich ist die Zahl 2 Grenzwert der Folge.