Abituraufgabe 2

1. Gegeben seien die Punktmengen

$$A_k\left(-4k|k|k\right);\ B_k\left(0|2k|-k\right);\ C_k\left(2k|0|-2k\right);\quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

a) Zeigen Sie, dass die Punktmengen A_k, B_k, C_k für jeden Wert von k eine Ebene festlegen, sodass die Ebenenschar E_k entsteht!

b) Bestimmen Sie eine Gleichung in Normalenform sowie eine Koordinatengleichung dieser Ebenenschar E_k. Berechnen Sie hierzu den Normalenvektor mittels des Vektorprodukts. Zeigen Sie anhand des Normalenvektors bzw. der Koordinatengleichung, dass alle Ebenen der Schar zueinander parallel verlaufen. Beschreiben Sie auch die Lage der Ebenen E_k im kartesischen Koordinatensystem.

c) Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der Ebene E_1 (Parameter $k = 1$ der Ebenenschar E_k) mit den Koordinatenachsen und stellen Sie mit Hilfe dieser Durchstoßpunkte die Ebene E_1 im kartesischen Koordinatensystem dar. Zeigen Sie, dass nur zwei Durchstoßpunkte D_1, D_2 existieren.

2.

a) Bestimmen Sie die Schnittgerade s der Ebene E_1 (s. 1b: E_k für $k = 1$) und der x_1,x_2-Koordinatenebene. Zeigen Sie ohne Rechnung, dass der Durchstoßpunkt der ersten Koordinatenachse mit der Ebene E_1 (s. 1c) auf der Geraden s liegt.

b) Eine Gerade g durch den Punkt $D(2|0|1) \notin E_1$ verläuft parallel zur Schnittgeraden s (s. 2a) und soll auf die Ebene E_1 senkrecht projiziert werden, sodass die Bildgerade h entsteht. Bestimmen Sie eine Parametergleichung von h.

c) Veranschaulichen Sie die gegenseitige Lage der Ebene E_1 sowie der Geraden s, g und h mittels Schemazeichnung.

3.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte $M_k(-2k|1+k|4+k)$ längs einer zur Ebene E_1 parallelen Geraden m liegen.

b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden m von der Ebene E_1.

4.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes E, der auf der Schnittgeraden s (s. 2a) liegt, sodass die Punkte D_1, D_2 (s. 1c) und E Eckpunkte eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit D_1 als Scheitelpunkt des rechten Winkels sind. Fertigen Sie zuerst eine Schemazeichnung an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines vierten Punktes F, sodass die vier Punkte D_1, E, F, D_2 Eckpunkte eines Quadrats sind. Orientieren Sie sich an der Schemazeichnung der Aufgabe 4a).

5. Gegeben sei eine weitere Punktmenge

$$S_a\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}a-2\,\middle|\,3\,\middle|\,\frac{1}{2\sqrt{5}}a^2-\frac{1,5}{\sqrt{5}}\right);\quad a \in \left]-1;3\right[$$

Jeder Punkt S_a sei die Spitze einer quadratischen Pyramide mit dem Quadrat D_1, E, F, D_2 (s. 4b) als Grundfläche.

a) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit des Parameters a mit Hilfe des Spatprodukts. Zeigen Sie, dass für das Volumen $V(a)$ gilt: $V(a) = 1/3 \cdot (-a^2 + 2a + 3)$! Beachten Sie, dass der Parameter a nur im Intervall $]-1; 3[$ definiert ist.

b) Bestätigen Sie die Funktionsgleichung $V(a)$, indem Sie das Volumen auf der Grundlage des Mittelstufenstoffs bestimmen!

c) Für welchen Wert von a ist das Pyramidenvolumen maximal? Berechnen Sie auch die Maßzahl dieses Maximalvolumens.

Lösungen zur Abituraufgabe 2

zu 1a)

Nachweis, dass die Punktmenge

$$A_k(-4k|k|k);\ B_k(0|2k|-k);\ C_k(2k|0|-2k);\quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

für jeden Wert von k eine Ebene festlegt.

Im Allgemeinen legen drei nicht kollineare Punkte (drei nicht längs einer Linie/Geraden liegende Punkte) A, B, C eine Ebene fest. Liegen drei Punkte A, B, C nicht längs einer Geraden, dann sind die Vektoren $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ linear unabhängig. Es gilt also nachzuweisen, dass für jeden Wert von $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Vektoren $\overrightarrow{A_kB_k}$ und $\overrightarrow{A_kC_k}$ linear unabhängig (nicht parallel) sind. Genau dann legen die Punktmengen A_k, B_k, C_k für jeden Wert von k jeweils eine Ebene fest: (siehe 1. Teilbd., Kap.2, 4./5. Std. und 3. Teilbd. Kap.4, 1. Std.)

$$\overrightarrow{A_kB_k} = \begin{pmatrix} 0-(-4k) \\ 2k-k \\ -k-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k \\ k \\ -2k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{A_kC_k} = \begin{pmatrix} 6k \\ -k \\ -3k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq r \cdot \left(k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Die Vektoren $k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind untereinander linear abhängig, sodass genau ein Vektor, z.B für $k = 1$ der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, alle anderen Vektoren der Schar repräsentiert. Dies gilt auch für die Vektoren der Schar $k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Kein Repräsentant der Schar $k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ lässt sich in linearer Abhängigkeit eines Repräsentanten der Schar $k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ darstellen: