

11.3 Gleichung der Tangentialebene einer Kugel als Analogon der Kreistangente; Polarebene einer Kugel als Analogon der Kreispolaren

Stundenbild

3. Stunde

11.3.1 Herleitung der Gleichung einer Tangentialebene

Die Schüler erwerben folgende inhaltliche und prozessbezogene mathematische Kompetenzen

- Sie erkennen, dass eine Tangentialebene an eine Kugel das dreidimensionale Analogon der Kreistangente ist.
- Sie erkennen, dass ähnlich wie bei der Herleitung der Tangentengleichung die Orthogonalität von Tangentialebene und Berührradius die maßgebende Grundlage für die Herleitung der Gleichung der Tangentialebene ist.

- Aufbauend auf dieser Erkenntnis erkennen die Schüler anhand einer geeigneten Schemazeichnung, dass die Vektoren \overrightarrow{MB} und \overrightarrow{BX} orthogonal sind und dass für \overrightarrow{BX} gilt:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BX} = (\vec{x} - \vec{b}) = (\vec{x} - \vec{m}) - (\vec{b} - \vec{m}).$$

Demnach ist die Herleitung der Gleichung der Tangentialebene das dreidimensionale Analogon der Herleitung der zweidimensionalen Tangentengleichung.

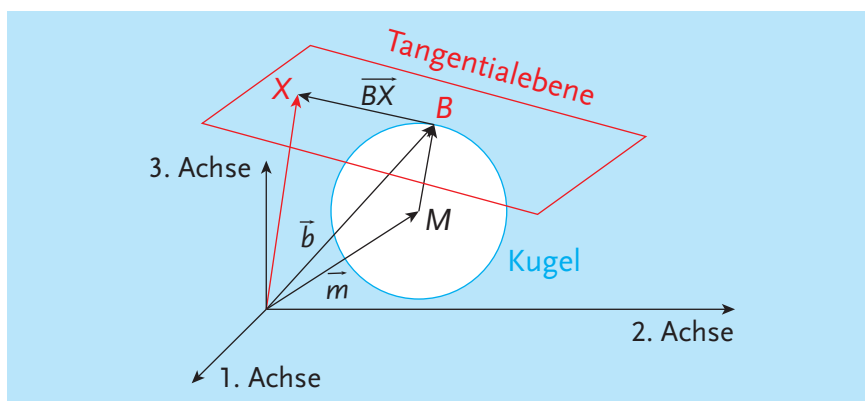
- Auf dieser Grundlage gewinnen die Schüler in eigenverantwortlicher Arbeit die Vektorgleichung $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$ und die Koordinatengleichung $(x_1 - m_1) \cdot (b_1 - m_1) + (x_2 - m_2) \cdot (b_2 - m_2) + (x_3 - m_3) \cdot (b_3 - m_3) = r^2$ der Tangentialebene sowie die Koordinatengleichung $x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2 + x_3 \cdot b_3 = r^2$, wenn der Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung ist.
- Die Schüler sind in der Lage, in eigenverantwortlicher Arbeit die hergeleiteten Gleichungen anzuwenden.

Methode

eigenverantwortliches, arbeitsgleiches Arbeiten in Gruppen mit knappen Einschüben des Frontalunterrichts

Der Lehrer

beauftragt die Schüler, die Gleichung einer Tangentialebene, die die gegebene Kugel in einem vorgegebenen Punkt B berührt, in Analogie zur Herleitung der Tangentengleichung herzuleiten. Dabei sollen sich die Schüler an Abb. 11.8 orientieren.



Tafelanschrift (Seitenflügel)
oder Projektion

Abb. 11.8

Im Vorfeld des eigenverantwortlichen Arbeitens *reflektiert der Lehrer* gemeinsam mit den Schülern in knapper Form die Herleitung der Tangentengleichung und führt die Schüler im Unterrichtsgespräch auf die für die hier verlangte Herleitung entscheidende Erkenntnis:

Das dreidimensionale Analogon der Kreistangente ist die Tangentialebene einer Kugel. Wie die Tangente den Kreis berührt, berührt sie die Kugel in einem Punkt und *steht wie die Tangente senkrecht auf dem Radius im Berührungspunkt*.

Präsentation



Tafelanschrift
Erklärungen stichwortartig

Herleitung der Gleichung der Tangentialebene

Wenn die Tangentialebene senkrecht auf dem Berührungsradius steht, sind gemäß Abb. 11.8 die Vektoren \overrightarrow{MB} und \overrightarrow{BX} zueinander orthogonal.

Aus $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{BX}$ folgt: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BX} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (Gl. 1)

Im Rahmen der geplanten Umformung betrachten wir zunächst unter Bezugnahme auf Abb. 11.8 den Vektor $\overrightarrow{BX} = \vec{x} - \vec{b}$ als Summenvektor.

Gemäß Abb. 11.8 gilt:

$$\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MX} = -\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MX} - \overrightarrow{MB} = (\vec{x} - \vec{m}) - (\vec{b} - \vec{m})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BX} = (\vec{x} - \vec{b}) = (\vec{x} - \vec{m}) - (\vec{b} - \vec{m}) \quad (\text{Gl. 2})$$

Gl. 2 in Gl. 1:

$$(\vec{b} - \vec{m}) \cdot [(\vec{x} - \vec{m}) - (\vec{b} - \vec{m})] = 0 \rightarrow \text{Distributivgesetz:}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) - (\vec{b} - \vec{m})^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = (\vec{b} - \vec{m})^2 \quad (\text{Gl. 3})$$

Gemäß geometrischer Deutung des Skalarprodukts gilt für das Quadrat des Vektors $\vec{b} - \vec{m}$: $(\vec{b} - \vec{m})^2 = |\vec{b} - \vec{m}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 = r^2$

Wir ersetzen in Gl. 3 den rechten Term $(\vec{b} - \vec{m})^2$ durch das Quadrat des Kugelradius und erhalten die Gleichung der Tangentialebene, die die Kugel K : $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ im Punkt $B(b_1 | b_2 | b_3)$ berührt, in der Vektorform:

$$T: (\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \\ x_3 - m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - m_1 \\ b_1 - m_1 \\ b_3 - m_3 \end{pmatrix} = r^2$$

Unter Bezugnahme auf die Definition des Skalarprodukts zweier Spaltenvektoren gewinnen wir die Koordinatengleichung der Tangentialebene:

$$T: (x_1 - m_1) \cdot (b_1 - m_1) + (x_2 - m_2) \cdot (b_2 - m_2) + (x_3 - m_3) \cdot (b_3 - m_3) = r^2$$

Liegt der Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung, gilt die Koordinatengleichung $x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2 + x_3 \cdot b_3 = r^2$.

Anwendungsbeispiel

Gegeben sind eine Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(3|0|2)$ und dem Radius $r = 5$ LE sowie die Berührungspunkte $B_1(3|0|7)$ und $B_2(3|3|-2)$ zweier Tangentialebenen.