

8 Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

8.1 Definition des Skalarprodukts im Vektorraum der n -Tupel reeller Zahlen / Eigenschaften des Skalarprodukts

1. Stunde

Stundenbild

8.1.1 Definition des Skalarprodukts

Die Schüler gewinnen folgende inhaltliche und prozessbezogene mathematische Kompetenzen:

- Durch Verknüpfung einer Stückzahlliste und einer Gewinnliste lässt sich der Tageserlös eines Obsthändlers berechnen.

Stückzahlliste		Gewinnliste
50	→	0,60
35	→	0,55
45	→	0,70
40	→	0,45
55	→	0,65

- Zur Berechnung des Tageserlöses wird die jeweilige Stückzahl mit der entsprechenden Gewinnzahl multipliziert und die erhaltenen Produkte werden addiert:
Erlös = $50 \cdot 0,60 + 35 \cdot 0,55 + 45 \cdot 0,70 + 40 \cdot 0,45 + 55 \cdot 0,65 = 134,50$
- Ersetzt man die Listen durch Spaltenvektoren, lässt sich der Tageserlös durch Verknüpfung dieser Vektoren ermitteln. Das Ergebnis dieser Verknüpfung ist eine reelle Zahl, ein Skalar.
- Bei dieser Kombination aus multiplikativer und additiver Verknüpfung des Stückzahlvektors und des Preisvektors räumen wir der Multiplikation eine höhere Priorität ein und bezeichnen diese Art der Verknüpfung zweier Spaltenvektoren als Produkt. Weil das Resultat der Vektorverknüpfung ein Skalar ist, nennen wir die Verknüpfung Skalarprodukt.
- Bezug nehmend auf den konkreten Fall, lässt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren des Vektorraums der n -Tupel reeller Zahlen definieren:

Gegeben sind die n -dimensionalen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ des Vektorraums der

n -Tupel reeller Zahlen. Dann bezeichnet man den Term $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, dessen Wert eine reelle Zahl, ein Skalar ist, als Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Unterrichtsschritte

Hinführendes Beispiel

Methode

fragend-entwickelnde Methode des Frontalunterrichts



Der Lehrer konfrontiert die Schüler mit folgender Alltagssituation:

Ein Obsthändler bezieht fünf verschiedene Obstsorten im Großhandel, nämlich Äpfel, Birnen, Bananen, Trauben und Erdbeeren. Er bietet sie an einem bestimmten Wochentag auf dem Markt an. Am Vortag hatte er das gesamte eingekaufte Obst verkauft, weil er wegen eines billigen Einkaufs jede Obstsorte zu Minimalpreisen anbieten konnte. Deshalb kaufte er für heute mehr Obst von jeder Sorte ein, nämlich 50 kg Äpfel, 35 kg Birnen, 45 kg Bananen, 40 kg Trauben und 55 Schachteln Erdbeeren zu je 1 kg. Der Einkauf war jedoch teurer als am Vortag. Trotzdem verzichtete der Händler auf eine Preiserhöhung, da er auch heute das gesamte Obst verkaufen wollte. Vor Eröffnung des Marktes berechnete er den Erlös, den er bei Beibehaltung der Preise pro kg der jeweilig verkauften Obstsorte erzielt:

Äpfel: 0,60 € Gewinn pro kg
 Birnen: 0,55 € Gewinn pro kg
 Bananen: 0,70 € Gewinn pro kg
 Trauben: 0,45 € Gewinn pro kg
 Erdbeeren: 0,65 € Gewinn pro kg

Um die für den nächsten Tag notwendige Kalkulation erstellen zu können, muss er möglichst schnell, am besten vor dem Beginn des Marktes, den maximal möglichen Tageserlös ermitteln. Aufgrund der für ihn maßgebenden Erfahrungswerte weiß er, dass sich bei Berücksichtigung weiterer Unkosten der Tagesverkauf nur lohnt, wenn er täglich als Summe aller Einzelgewinne einen Erlös von mindestens 100 € erzielt.

Lehrerimpuls

Zunächst könnte der Händler die hier relevanten Zahlenwerte zwecks besserer Übersicht in zwei Listen ordnen.

Mögliche Schüleraussage

Der Händler könnte die Stückzahlen (in kg) der Obstsorten in einer Stückzahlliste und die jeweils zugeordneten Preise in einer Gewinnliste ordnen.

Der Lehrer bereitet die beiden Listen auf der Tafel vor. Je ein Schüler schreibt die passenden Zahlen in die Listen hinein. Danach zeichnet der Lehrer Zuordnungspfeile ein.



Abb. 8.1

Stückzahlliste	Gewinnliste
50	→ 0,60
35	→ 0,55
45	→ 0,70
40	→ 0,45
55	→ 0,65

Lehrerimpuls

Durch Verknüpfung beider Listen lässt sich der Tageserlös berechnen. Bezug nehmend auf beide Listen berechnen die Schüler den Tageserlös. Ein Schüler überträgt die Rechnung an die Tafel und erklärt:
 Wenn das gesamte Obst verkauft wird, berechnet sich folgender Tageserlös:

$$50 \cdot 0,60 + 35 \cdot 0,55 + 45 \cdot 0,70 + 40 \cdot 0,45 + 55 \cdot 0,65 = 134,50$$