2.5 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Spaltenvektoren

Stundenbild

5. Stunde

Anmerkung

Die für diese Stunde vorgesehenen Teilthemen stehen in einem inneren Zusammenhang. Bei der Umsetzung des geplanten Unterrichtsverlaufs könnte aus Zeitgründen eine inhaltliche Trennung der Teilthemen notwendig werden. Daher ist bereits im Vorfeld das Einplanen einer sinnvollen Zäsur empfehlenswert.
Um eine inhaltliche Trennung in der Präsentation des Stundenbildes zu vermeiden, ist die Darstellung auf eine Stunde beschränkt.

2.5.1

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit zweier Spaltenvektoren

Tafelanschrift

Die Schüler erwerben folgende inhaltliche und prozessbezogene mathematische Kompetenzen:

- Unterscheiden sich die Koordinaten zweier Spaltenvektoren um einen konstanten Faktor, sind beide Vektoren linear abhängig.
- Die aus linear abhängigen Spaltenvektoren resultierenden Pfeilklassen im kartesischen Koordinatensystem sind zueinander parallel.
- Unterscheiden sich die Koordinaten zweier Spaltenvektoren nicht um einen konstanten Faktor, sind sie linear unabhängig. Die hieraus resultierenden Pfeilklassen sind zueinander nicht parallel.

Methode

eigenverantwortliches Arbeiten in Gruppen in Kombination mit der fragend-entwickelnden Methode im Rahmen eines eingeschobenen Unterrichtsgesprächs

Der Lehrer

gibt zwei Spaltenvektoren vor:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Tafelanschrift

Gruppe 1 (bzw. Gruppe 1 und 2) erhält die Aufgabe, beide Vektoren im kartesischen Koordinatensystem darzustellen und anhand der gezeichneten Pfeilklassen auf die lineare Unabhängigkeit oder Abhängigkeit zu schließen. Gruppe 2 (bzw. Gruppe 3 und 4) soll durch Vergleich der entsprechenden Koordinaten überprüfen, ob sich ein Spaltenvektor als Linearkombination des anderen darstellen lässt oder nicht und in Konsequenz davon die notwendigen Schlüsse ziehen.

Präsentation

Gruppe 1

Ein nach dem Zufallsprinzip bestimmter Schüler projiziert (OHP) die Darstellung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im kartesischen Koordinatensystem.

Tafelanschrift

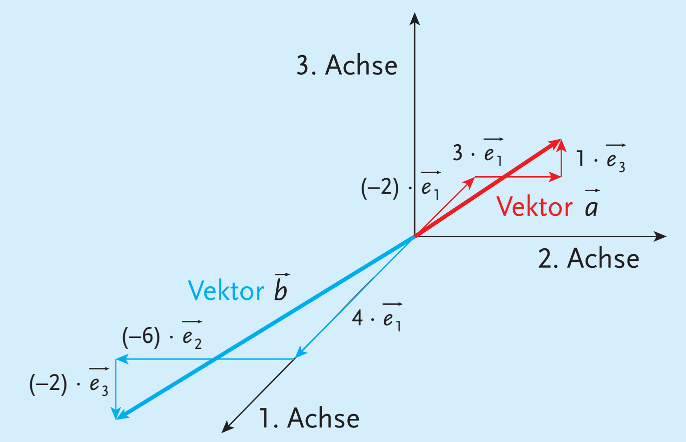

Abb. 2.16

Ein zweiter zufällig bestimmter Schüler vergleicht die unter Bezugnahme auf die Spaltenvektoren gezeichneten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gegensinnig parallel.

Vektor $\vec{b}$ besitzt die doppelte Länge des Vektors $\vec{a}$, somit ist $\vec{a}$ halb so lang wie $\vec{b}$.

Dieser Vergleich zeigt:

Tafelanschrift

$\vec{b}$ ist als Linearkombination von $\vec{a}$ bzw. $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}$ darstellbar, so dass gilt:

$\vec{b} = (-2) \cdot \vec{a}$ bzw. $\vec{a} = (-\frac{1}{2}) \cdot \vec{b}$.

Folglich sind die aus den Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ resultierenden Pfeilklassen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.

Gruppe 2

Ein zufällig bestimmter Schüler erklärt den Koordinatenvergleich; ein zweiter Schüler gibt die Entscheidung bezüglich der daraus gezogenen Konsequenzen wieder.

Die entsprechenden Koordinaten unterscheiden sich jeweils um den konstanten Faktor $-\frac{1}{2}$ bzw. (–2):

$$(-2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4;\ 3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-6);\ 1 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)$$

bzw. $4 = (-2) \cdot (-2);\ (-6) = (-2) \cdot 3;\ (-2) \cdot 1$