7. Stunde

# 9.7 Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen *X* und *Y* – Festigung und Vertiefung

Nachfolgende für diese Thematik typischen Aufgaben mit Lösungen dienen dem Lehrenden als Orientierungshilfe für die Behandlung affiner Aufgaben im Unterricht sowie für die Wahl von Aufgaben für eine Klausur- bzw. Kursarbeit.

**Methode**
eigenverantwortliches Arbeiten in Gruppen

**1.** Gegeben ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $X$ und $Y$:

| $X = x_i$ / $Y = y_j$ | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,10 | 0,15 | 0,25 | 0 |
| 2 | 0,05 | 0,25 | 0 | 0,20 |

Abb. 9.14

**a)** Bestimmen Sie die Einzelverteilungen von $X$ und $Y$!

**Lösung zu 1a**
Die Randwahrscheinlichkeiten als Summe der Spalten- bzw. Zeilenwahrscheinlichkeiten sind die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ bzw. $P(Y = y_j)$:

$P(X = –1) = 0,10 + 0,05 = 0,15;$
$P(X = 0) = 0,15 + 0,25 = 0,40;$
$P(X = 1) = 0,25 + 0 = 0,25;$
$P(X = 2) = 0 + 0,20 = 0,20$
$P(Y = 1) = 0,10 + 0,15 + 0,25 + 0 = 0,50;$
$P(Y = 2) = 0,05 + 0,25 + 0 + 0,20 = 0,50$

| $x_i$ | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,15 | 0,40 | 0,25 | 0,20 |

Abb. 9.15a

| $y_j$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $P(Y = y_j)$ | 0,5 | 0,5 |

Abb. 9.15b

**1b)** Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ voneinander unabhängig oder abhängig sind!

**Lösung zu 1b**
Sind $X$ und $Y$ voneinander unabhängig, dann gilt für alle $X = x_i$, $Y = y_j$:

$P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$:
z. B.: $P(X = –1 \wedge Y = 1) = 0,10$
$\neq P(X = –1) \cdot P(Y = 1) = 0,15 \cdot 0,5$

Folglich sind $X$ und $Y$ *voneinander abhängig*.

**1c)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X$ *und zugleich* $Y$ mindestens den Wert 1 annehmen!

**Lösung zu 1c**

$$\begin{aligned} P(X \geq 1 \wedge Y \geq 1) &= P(X = 1 \wedge Y = 1) + P(X = 1 \wedge Y = 2) \\ &\quad + P(X = 2 \wedge Y = 1) \\ &\quad + P(X = 2 \wedge Y = 2) \\ &= 0{,}25 + 0 + 0 + 0{,}20 = 0{,}45 \end{aligned}$$

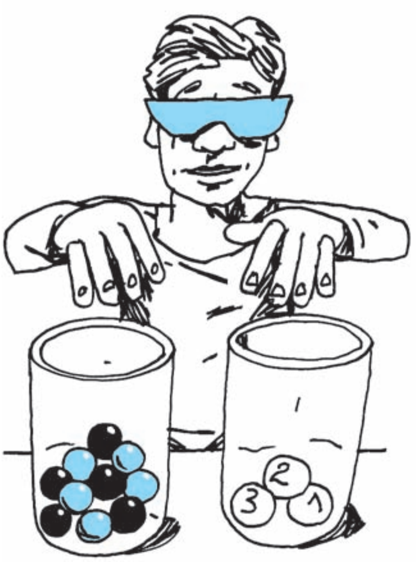

Abb. 9.16

**2.** Ein Zufallsexperiment besteht aus zwei Teilversuchen. Zunächst werden aus einer Urne mit 5 roten und 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln mit einem Griff entnommen. Danach wird aus einer zweiten Urne, in der 3 Kugeln mit den aufgedruckten Ziffern 1 bis 3 liegen, nacheinander 2 Kugeln (ohne Zurücklegen) gezogen. Die Zufallsvariable $X$ bezeichne die Anzahl der im 1. Teilversuch gezogenen roten Kugeln, die Zufallsvariable $Y$ die aus den Ziffern der 2 gezogenen Kugeln gebildeten 2-stelligen Zahlen.

**a)** Weshalb kann man von der Unabhängigkeit beider Zufallsvariablen ausgehen?

**Lösung zu 2a**

Die beiden Zufallsversuche werden unabhängig voneinander durchgeführt, sodass die Ergebnisse des 1. Teilversuchs keinen Einfluss auf die Ergebnisse des 2. Teilversuchs haben können. Folglich sind die durch die Variablen $X$ und $Y$ bezeichneten Ereignisse und damit auch die beiden Zufallsvariablen voneinander unabhängig.

**2b)** Ermitteln Sie zuerst die Einzelverteilungen und danach die gemeinsame Wahrscheinlichkeit von $X$ und $Y$!

**Lösung zu 2b**

Verteilung der Zufallsvariablen $X$: zugrundeliegende Gleichung für $k$ rote Kugeln:

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{5}{2-k}}{\binom{10}{2}}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |