2 Zahlenspielereien

L-2.1 Quadrafone Zahlen (51723)

a) Zunächst untersucht man, ob 2009 eine Quadratzahl als Faktor enthält. Man erhält die Zerlegung $2009 = 7 \cdot 287 = 7 \cdot 7 \cdot 41 = 7^2 \cdot 41$.
Die kleinste Zahl, die mit 2009 multipliziert eine Quadratzahl ergibt, ist also 41:
$2009 \cdot 41 = 7 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 41 = 7 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 41 = 287^2$.
Die zwei nächstgrößeren Quadratzahlen, die 2009 als Faktor enthalten, sind deshalb
$2009 \cdot 41 \cdot 4 = 7 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 2 = 574^2$ und
$2009 \cdot 41 \cdot 9 = 7 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 3 \cdot 3 = 861^2$.
Die gesuchten zu 2009 quadrafonen Zahlen sind dann $41 \cdot 4 = 164$ und $41 \cdot 9 = 369$.

b) Simon hat nicht Recht! Wegen $(2009 \cdot 100)^2 = 2009 \cdot 20\,090\,000$ sind 2009 und 20 090 000 quadrafon, aber $20\,090\,000 > 1\,000\,000$. Es gibt beliebig große Zahlen, die zu 2009 quadrafon sind.

c) Simon nimmt einfach alle zweistelligen Quadratzahlen: 16, 25, 36, 49, 64 und 81. Jede dieser Zahlen ist zu jeder anderen quadrafon, da zwei Quadratzahlen miteinander multipliziert wieder eine Quadratzahl ergeben.

L-2.2 Gleiche Ziffern in Reihe (51522)

a) Beispiel für eine Stelle mit drei gleichen Ziffern (n = 3):
1 2 3 … 21 22 23 24 … 2006 2007
Beispiel für eine Stelle mit fünf gleichen Ziffern (n = 5):
1 2 3 … 332 333 334 … 2006 2007
Beispiel für eine Stelle mit sieben gleichen Ziffern (n = 7):
1 2 3 … 1010 1111 1112 … 2006 2007
Nun wird n = 4 betrachtet:
Da sich zwei aufeinanderfolgende zweistellige Zahlen in mindestens einer Ziffer unterscheiden, ist die Form xx.xx nicht möglich. Aber auch die Form ax.xx.xb ist nicht möglich, da die Einerziffer x der ersten Zahl ax nicht mit der Einerziffer der zweiten Zahl xx übereinstimmen kann.

Bei den dreistelligen Zahlen ist die Form abc.xxx.xde wegen $x \neq d$ (sonst wären es fünf gleiche Ziffern!) nicht möglich, da für $x \neq 9$ die Zehnerziffern von xxx und xde übereinstimmen müssten. Da nach 999 die Zahl 1000 folgt, ist auch $x = 9$ nicht möglich. Die Form abx.xxx.cde ist nicht möglich, da die Einerziffern von abx und xxx verschieden sind. Die Form axx.xxb ist ausgeschlossen, da die Hunderterziffern für $x \neq 9$ identisch sein müssen; auch der Fall $x = 9$ kann hier nicht auftreten.
Bei den vierstelligen Zahlen könnten nur die Formen abcd.1111.efgh, a111.1bcd, ab11.11cd und abc1.111d auftreten.
Die erste ist nicht möglich, da dann $d = 0$, $h = 2$ und $e = f = g = 1$ folgt (genau siebenmal die Ziffer 1), die restlichen Formen sind nicht möglich, da jeweils $a = b = c = 1$ und $d = 2$ folgt, was aber wieder genau siebenmal die Ziffer 1 bedeutet.
Also können nicht genau vier Ziffern aufeinanderfolgen.

b) Chris müsste die gegebene Zahl mindestens bis 9000 fortsetzen, da erst bei 123 $\ldots$ 8999 9000 genau vier gleiche Ziffern nacheinander erscheinen.

L-2.3 Der Zahlenwurm (51722)

a) Die neun einstelligen Zahlen ergeben die ersten 9 Ziffern, die 90 zweistelligen Zahlen die nächsten 180 Ziffern. Die restlichen $2009 - 189 = 1820$ Ziffern stammen von dreistelligen Zahlen. Wegen $1820 : 3 = 606$ Rest 2 ist an 2009-ter Stelle die zweite Ziffer der 607-ten dreistelligen Zahl, also die 0 von $706 = 99 + 607$.
An der 2009-ten Stelle steht also eine 0.

b) In jeder Hunderterschaft, z. B. 100, ..., 199, taucht die „2“ zehnmal als Zehner- und zehnmal als Einerziffer, also 20-mal, auf. Bei 200, ..., 299 gibt es zusätzlich noch 100 Zweien auf der Hunderterstelle. Da 1999 zwanzig Hundertschaften enthält, treten bis 1999 $20 \cdot 20 + 2 \cdot 100 = 600$ Ziffern „2“ auf. Bei den Zahlen 2000 bis 2009 kommen noch elf Zweier dazu, weshalb die Ziffer 2 insgesamt 611-mal in dem Zahlenwurm vorkommt.

c) Da die Ziffer 2 fünfmal hintereinander vorkommt, kann dies frühestens bei den dreistelligen Zahlen auftreten. Sie treten zum ersten Mal in der Folge 221, $\underline{222}$, $\underline{22}$3 auf.
Die gesuchte „2“ ist die erste Ziffer nach der 122-ten dreistelligen Zahl. Ihre Stellennummer lautet damit: $9 + 180 + 122 \cdot 3 + 1 = 556$.