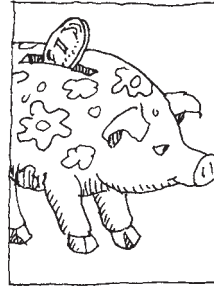


Sparen für einen Porsche

Wann kann ich mir einen Porsche kaufen, wenn ich jeden Monat 10 € dafür auf ein Sparkonto einzahle?



84

Hilfe: Folgende Formel kann bei der Rechnung hilfreich sein:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Über die Gültigkeit dieser Formel kann man sich leicht überzeugen, denn es ist:

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) \cdot (q - 1) = (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}) - (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = q^{n+1} - 1$$

Wir nehmen an, dass der Zinssatz für die Spareinlage unverändert über die gesamte Sparzeit $p\%$ beträgt.

Ein Jahr nach der ersten Einzahlung betragen die gutgeschriebenen Zinsen:

$$10\text{€} \cdot p\% \cdot \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \frac{7}{12} + \frac{6}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \right) = 65\text{€} \cdot p\%$$

Das Kapital K_1 nach einem Jahr ist damit: $K_1 = 120\text{€} + 65\text{€} \cdot p\%$.

Man erhält:

- Kapital nach 2 Jahren: $K_1(1 + p\%) + K_1$
- Kapital nach 3 Jahren: $K_1(1 + p\%)^2 + K_1(1 + p\%) + K_1$
- Kapital nach 4 Jahren: $K_1(1 + p\%)^3 + K_1(1 + p\%)^2 + K_1(1 + p\%) + K_1$
- Kapital nach n Jahren:

$$\begin{aligned} & K_1(1 + p\%)^{n-1} + \dots + K_1(1 + p\%)^2 + K_1(1 + p\%) + K_1 \\ &= K_1 \cdot [(1 + p\%)^{n-1} + \dots + (1 + p\%)^2 + (1 + p\%) + 1] \\ &= K_1 \cdot \frac{(1 + p\%)^n - 1}{p\%} \end{aligned}$$

Lösung 84