4. Stunde

4.2.2 Fortsetzung des Themas „Empirisches Gesetz der großen Zahlen“

Präsentation der Hausaufgaben

Die Stunde beginnt mit der Präsentation der aus dem Zufallsexperiment der jeweiligen Gruppe resultierenden Häufigkeitsverteilung sowie des dazugehörigen Polygons.
Exemplarisch für die vom Lehrer an die einzelnen Gruppen erteilten Experimentieraufträge und den damit verknüpften Häufigkeitsverteilungen mag folgendes Beispiel dienen:
Man erhält z. B. bezüglich des Werfens eines Würfels folgende mögliche Häufigkeitsverteilung, jeweils in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n.

e_i	1	2	3	4	5	6	n
$h(e_i)$	0,06	0,24	0,10	0,20	0,14	0,26	50
$h(e_i)$	0,19	0,16	0,13	0,17	0,16	0,19	100
$h(e_i)$	0,17	0,15	0,17	0,18	0,16	0,17	200
$h(e_i)$	0,165	0,162	0,169	0,166	0,173	0,166	400

Abb. 4.1

Methodenwechsel
fragend-entwickelnde Methode

Die *Schüler* werten die Häufigkeitsverteilung sowie deren graphische Darstellung aus.

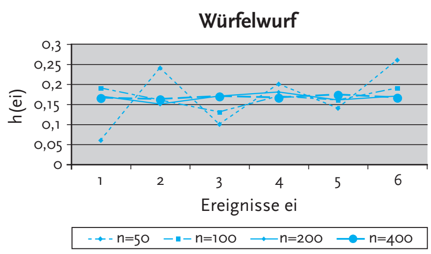

Abb. 4.2:
Graphische Darstellung (Polygon) der aus der Tabelle übertragenen relativen Häufigkeiten der einzelnen Augenzahlen für jeden der Umfänge n = 50, 100, 200, 400
(hergestellt mit Excel; Abb_4.2.jpg aus 1 Würfelwurf.xls)

Mögliche Schüleraussage

Bei kleinen Stichprobenumfängen, wie n = 50 oder 100, weichen die relativen Häufigkeiten für ein bestimmtes Ergebnis bisweilen stark voneinander ab. Mit zunehmendem Stichprobenumfang nehmen diese Schwankungen ab. Die relativen Häufigkeiten für ein bestimmtes Ergebnis stabilisieren sich.

Lehrerimpuls

Sicherlich könnte man bei noch größerem Zeitaufwand oder bei Einsatz des PCs die Stabilisierung der relativen Häufigkeit wesentlich deutlicher demonstrieren.

Mögliche Schüleraussage

Da die Schwankungen der relativen Häufigkeit mit zunehmendem Stichprobenumfang n abnehmen, könnte man eine noch deutlichere Stabilisierung der relativen Häufigkeit erreichen, wenn der Stichprobenumfang weiter zunimmt.
Vielleicht sollte man die Zufallsexperimente mittels PCs simulieren, um deutlich größere Stichprobenumfänge ins Spiel zu bringen.

Der Lehrer greift den Schülervorschlag auf

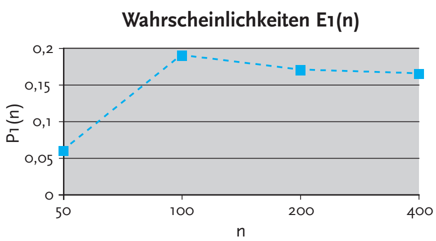

Abb. 4.3:
Beispiel einer schlechten (automatischen) Realisierung mit Excel. Die Intervalle müssten verschieden breit sein!
(Abb_4.3.jpg aus 1 Würfelwurf.xls)

Herleitung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen durch Auswertung von Simulationsexperimenten

Methode

eigenverantwortliches Arbeiten in Gruppen: Simulation von Zufallsexperimenten mit einem Rechner

Der Lehrer stellt jeder Gruppe einen Rechner sowie geeignete Rechnerprogramme für eine Simulation von Zufallsexperimenten mit automatischer Häufigkeitsverteilung und deren graphischer Darstellung zur Verfügung. Auftrag: die real durchgeführten Zufallsexperimente simulieren, um unter geringem Zeitaufwand den Stabilisierungstrend der relativen Häufigkeiten bei größeren Stichprobenumfängen noch deutlicher als beim Realexperiment hervorzuheben mit dem Ziel, die entscheidenden Grundlagen für das empirische Gesetz der großen Zahlen zu legen.

Dabei sollen die Schüler die Stichprobenumfänge n = 20, 50, 100, 200, 400, 800, 1000, 2000, 5000, 10000 wählen.

Präsentation

Die einzelnen Gruppen projizieren die Häufigkeitsverteilungen (bei zunehmenden Werten von n) und die dazugehörigen Polygone mittels Beamer auf die Projektionswand.

Die nicht präsentierenden Schüler erhalten Ausdrucke der dargestellten Verteilungen und der dazugehörigen Polygone, um anhand möglichst vieler unterschiedlicher Zufallsexperimente und deren Häufigkeitsverteilungen den Stabilisierungstrend der relativen Häufigkeiten bei großem Stichprobenumfang zu untermauern, um damit der Allgemeingültigkeit des empirischen Gesetzes der großen Zahlen Rechnung zu tragen.

Die Schüler kommentieren die Häufigkeitsverteilungen und deren Polygone

Mögliche *Schüleranalyse:* Bei sehr großen Stichprobenumfängen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten bestimmter Ergebnisse noch deutlicher und schwanken nur noch geringfügig um einen bestimmten Zahlenwert. Die Schüler sehen sich in ihrer Annahme bestätigt.

Bei sehr großen Stichprobenumfängen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten und schwanken um einen bestimmten Zahlenwert.

Tafelanschrift

Der Lehrer ergänzt

Die reelle Zahl, welche die relative Häufigkeit eines Ergebnisses e_i bei großen Stichprobenumfängen annähert, nennen wir $P(e_i)$ mit $0 \leq P(e_i) \leq 1$. Diese reelle Zahl $P(e_i)$ bezeichnen wir als *theoretische Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ergebnisses e_i.

Weil wir diese Erkenntnis über die Durchführung von Zufallsexperimenten, also auf empirischem Wege gewonnen haben, bezeichnen wir das hier gewonnene Gesetz als *empirisches Gesetz der großen Zahlen.*

Tafelanschrift

(P – probability (engl.) – Wahrscheinlichkeit)