

Lösungen Übungsaufgaben I

Aufgabe 1:

Der griechische Mathematiker Eratosthenes entwickelte ein Verfahren, um die Primzahlen aus den natürlichen Zahlen auszusieben. Er notierte alle Zahlen von 2 bis 100.

- Er markierte die 2 als Primzahl und strich dann alle Vielfachen von 2.
- Er ging zur nächsten nichtgestrichenen Zahl, markierte sie als Primzahl und strich alle Vielfachen dieser Zahl.
- Er machte so weiter bis zu der Zahl n , für die gilt $n^2 > 100$.

Damit hatte er alle Primzahlen zwischen 1 und 100. Dieses Verfahren ist bekannt unter dem Namen **Sieb des Eratosthenes**. Siebe selbst einmal.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Aufgabe 2:

- Wie heißen die beiden Primzahlen, die als einzige eine Differenz von 1 aufweisen? 2, 3
- Welches ist die kleinste vierstellige Primzahl? 1009
- Welches ist die kleinste dreistellige Primzahl? 101

Lösungen Übungsaufgaben II

Aufgabe 3:

Suche alle Primzahlzwillinge zwischen 1 und 100.

3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43; 59, 61; 71, 73

Aufgabe 4:

Zeige mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, dass die Zahl

- 108 ist gerade und hat den Teiler 2
- 135 hat den Teiler 5
- 177 hat die Quersumme 15 und damit den Teiler 3
- 189 hat die Quersumme 18 und damit den Teiler 3 keine Primzahl ist.

Aufgabe 5:

Finde drei verschiedene Primzahlen, deren Summe erneut eine Primzahl ergibt.

z. B. $3 + 11 + 17 = 31$ $3 + 13 + 31 = 47$

Aufgabe 6:

Welche Zahl hat die folgende Primfaktorzerlegung?

- $3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$ 8775
- $2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 23$ 38962
- $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 17$ 59976

Aufgabe 7:

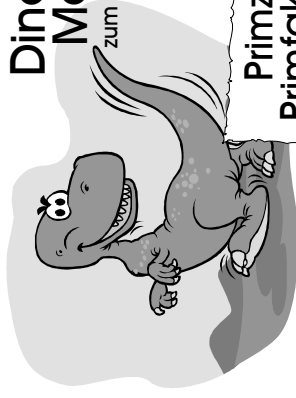
Zerlege in Primfaktoren.

$$\begin{aligned}
 4200 &= 2 \cdot 2100 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 1050 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 525 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 175 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\
 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7
 \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

Zerlege in Primfaktoren.

$$\begin{aligned}
 10 &= 2 \cdot 5 \\
 100 &= 2^2 \cdot 5^2 \\
 1\,000 &= 2^3 \cdot 5^3 \\
 10\,000 &= 2^4 \cdot 5^4 \\
 100\,000 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\
 1\,000\,000 &= 2^6 \cdot 5^6
 \end{aligned}$$



Primzahlen und Primfaktorzerlegung

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl, die
1. größer als 1 ist und
2. als Teiler nur die Zahl 1 und sich selbst hat.

Beispiel:

41 ist eine Primzahl. $T_{41} = \{1, 41\}$

Als **Primzahlzwillinge** bezeichnet man zwei aufeinander folgende Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt

Beispiel:

1721 und 1723 sind Primzahlzwillinge.

Man kann jede natürliche Zahl so in ein Produkt seiner Teiler zerlegen, dass diese Teiler nur aus Primzahlen bestehen.

Diese **Primfaktorzerlegung** ist eindeutig. Es gibt zu einer natürlichen Zahl n (bis auf die Reihenfolge) nur eine mögliche Zerlegung.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 2300 &= 2 \cdot 1150 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 575 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 115 \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 23 \\
 &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 23
 \end{aligned}$$

$2^2 \cdot 5^2 \cdot 23$ ist so etwas wie der genetische Fingerabdruck der Zahl 2300.



$$\begin{aligned}
 875 &= 5^3 \cdot 7 \\
 128 &= 2^7 \\
 2940 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2
 \end{aligned}$$

Musteraufgaben

Aufgabe 1:

Nenne alle Primzahlen zwischen

- a) 6 und 16. $7, 11, 13$
 b) 16 und 34 $17, 19, 23, 29, 31$
 c) 26 und 48 $29, 31, 37, 41, 43, 47$

Aufgabe 2:

Ist die Zahl 49 eine Primzahl?

Nein, denn $T_{49} = \{1, 7, 49\}$

Aufgabe 3:

- a) Wie heißt die kleinste zweistellige Primzahl?
 11
 b) Wie heißt die größte zweistellige Primzahl?
 97
 c) Wie heißt die größte dreistellige Primzahl?
 997

Aufgabe 4:

Welche Zahl hat die folgende Primfaktorzerlegung?

- a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ 504
 b) $2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$ 8250
 c) $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17$ 7650

Aufgabe 5:

Zerlege in Primfaktoren.

$$\begin{aligned} 900 &= 2 \cdot 450 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 225 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 75 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

$$6688 = 2 \cdot 3344$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 1672$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 836$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 418$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 209$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 19$$

$$= 2^5 \cdot 11 \cdot 19$$

Übungsaufgaben I

Aufgabe 1:

Der griechische Mathematiker Eratosthenes entwickelte ein Verfahren, um die Primzahlen aus den natürlichen Zahlen auszusieben. Er notierte alle Zahlen von 2 bis 100.

- Er markierte die 2 als Primzahl und strich dann alle Vielfachen von 2.
- Er ging zur nächsten nichtgestrichenen Zahl, markierte sie als Primzahl und strich alle Vielfachen dieser Zahl.
- Er machte so weiter bis zu der Zahl n , für die gilt $n^2 > 100$.

Damit hatte er alle Primzahlen zwischen 1 und 100. Dieses Verfahren ist bekannt unter dem Namen **Sieb des Eratosthenes**. Siebe selbst einmal.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Aufgabe 2:

- Wie heißen die beiden Primzahlen, die als einzige eine Differenz von 1 aufweisen?
- Welches ist die kleinste vierstellige Primzahl?
- Welches ist die kleinste dreistellige Primzahl?

Übungsaufgaben II

Aufgabe 3:

Suche alle Primzahlzwillinge zwischen 1 und 100.

Aufgabe 4:

Zeige mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, dass die Zahl

- a) 108
 b) 135
 c) 177
 d) 189
 keine Primzahl ist.

Aufgabe 5:

Finde drei verschiedene Primzahlen, deren Summe erneut eine Primzahl ergibt.

Aufgabe 6:

Welche Zahl hat die folgende Primfaktorzerlegung?

- a) $3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$
 b) $2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 23$
 c) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 17$

Aufgabe 7:

Zerlege in Primfaktoren.

$$4200 =$$

Aufgabe 8:

Zerlege in Primfaktoren.

$$\begin{aligned} 10 &= \\ 100 &= \\ 1\,000 &= \\ 10\,000 &= \\ 100\,000 &= \\ 1\,000\,000 &= \end{aligned}$$