Martin Kramer

Mathematik als Abenteuer

Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Erleben wird zur Grundlage des Unterrichtens

Leseprobe

Klett Kallmeyer

Martin Kramer

Mathematik als Abenteuer

Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Erleben wird zur Grundlage des Unterrichtens

Leseprobe

Klett | Kallmeyer

Martin Kramer, geb. 1973, Vater, Leiter der Didaktik der Mathematik an der Universität Freiburg, Theaterpädagoge (Bundesverband Theaterpädagogik), 2003–2012 Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik. Zahlreiche Publikationen und Lehrerfortbildungen zu handlungs- und erlebnisorientierter Didaktik, Konstruktivismus, angewandter Systemtheorie und unterrichtlicher Kommunikation. Zusammenarbeit mit dem Kultusministerium Baden-Württemberg, mit Mathe.Forscher, dem Schultheater-Studio Frankfurt u. v. m. – Weitere Informationen unter www.unterricht-als-abenteuer.de.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Impressum

Leseprobe aus:
Martin Kramer
Mathematik als Abenteuer
Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung

3. Auflage 2016

Redaktion: Gesine Bechtloff, Tiefenbronn
Fotos: Martin Kramer, Tübingen
Realisation: Bernd Burkart, Weinstadt-Baach
Druck der Leseprobe: Zimmermann Druck+Verlag GmbH, Widukindplatz 2, 58802 Balve
Printed in Germany

ISBN: 978-3-7800-4847-9

Inhaltsverzeichnis

Auszug aus dem Geleitwort von Prof. Dr. sc. math. Peter Gallin

Kennen Sie „Play Bach“? Was der französische Pianist Jacques Loussier mit der Musik von Johann Sebastian Bach macht, ist Martin Kramer für die Mathematik gelungen. Er hebt verborgene Schichten der Mathematik mit Konsequenz und Präzision für die breite Öffentlichkeit ans Licht, so wie Jacques Loussier zeigt, welch moderner Charakter in Bachs Musik steckt: Wesenszüge, die wohl nur wenigen Personen wirklich bekannt sind. Mit leichtfüßiger Sprache spricht Martin Kramer zu uns und bietet zunächst einmal spannende Unterhaltung, die aber von Zeit zu Zeit in ganz ernsthafte Botschaften zum Mathematikunterricht übergeht.

Die neueren didaktischen und pädagogischen Erkenntnisse fließen im Grundkonzept des Buches ganz selbstverständlich ein. Konsequent werden Bruners drei Repräsentationsebenen für mathematische Sachverhalte eingesetzt. Handlungen (Enaktives), Bilder (Ikonisches) und Formales (Symbolisches) werden immer simultan und nicht hierarchisch in attraktive Lernumgebungen eingebunden (EIS-Prinzip). Sie geben damit allen Lernenden die Möglichkeit, in der Mathematik Tritt zu fassen und etwas zu verstehen. Um den sogenannten kompetenzorientierten Unterricht muss man sich dann gar nicht mehr kümmern, denn alle Kompetenzen, die heute gefordert werden, entwickeln sich gleichsam von selbst. (…)

Schließlich wird das Fachliche sorgfältig durchdrungen und die wirklich schwierigen und wesentlichen Dinge werden auf allen drei Repräsentationsebenen breit behandelt und ausgehandelt. So fügt sich alles im „Wir“ zusammen. Es geht also nicht um Rosinen der Mathematik, sondern um den Stoff, der im Lehrplan festgeschrieben ist. Ziel ist es, mit möglichst wenig Vorgaben auszukommen, gleich mit etwas Komplexem zu starten, mit Spiel und Spaß an der Sache zu arbeiten und so zu den zentralen Einsichten vorzustoßen. Damit gelingt es, die Autonomie der Lernenden zu fördern und zu stärken, ihnen das Gefühl der sozialen Zugehörigkeit zu vermitteln und ihnen zur mathematischen Fachkompetenz zu verhelfen. (…)

Es sind nicht einfach Rezepte für die Lehrperson, die Martin Kramer hier vorstellt, sondern Vorschläge für eine neue Grundhaltung dem Stoff und den Lernenden gegenüber. Es ist dem Buch zu wünschen, dass es zu einer Veränderung im Mathematikunterricht beiträgt, welche die Motivation aller Beteiligten erhöht, nachhaltige Erlebnisse ermöglicht und fundiertes Wissen über Mathematik erzeugt.

Peter Gallim, Bauma, im Juli 2015

Teil VI

Analysis

Kapitel 20

Bewegungsabläufe aufzeichnen

In diesem Kapitel geht es um die Aufzeichnung einer realen (eindimensionalen) Begebenheit. So werden Wachstumsvorgänge, Bewegungsabläufe oder das Befüllen von Gläsern mit Hilfe von Schaubildern aufgezeichnet. Die zugehörige Funktionsvorschrift ist in den meisten Fällen unbekannt und das ist für den Einstieg ganz geschickt: Erstens ist der Ansatz wesentlich allgemeiner, als wenn man mit linearen Funktionen beginnt, und zweitens lenken keine Rechnungen vom wesentlichen Verständnis ab.

allgemeiner Einstieg ohne Rechnungen

Der Ansatz mit t-s- bzw. mit t-v-Diagrammen führt sehr weit. In Abschnitt 22.5 wird damit in die Differentialrechnung eingeführt.

20.1 Mathematik beginnt mit dem Lesen einer Uhr

In diesem Kapitel stehen t-s-Diagramme im Mittelpunkt. Formal passiert nichts anderes, als wenn man x-y-Diagramme betrachtet. Es ist ein guter Weg, weil er sofort eine Anwendung aufzeigt. Und trotz-

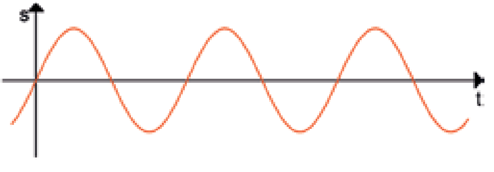
Zeit ist unsichtbar

dem erfordert es eine höhere Abstraktion: Die Zeit kann man nicht sehen. Uns Menschen fällt es schwer, in zeitlichen Abläufen zu denken. Daher stellen wir gerne Zeitpunkte oder zeitliche Entwicklungen räumlich dar. Wir haben Instrumente entwickelt, die zeitliche Abläufe räumlich darstellen.

Wir sprechen von Zeit*punkten,* Zeit*abschnitten* und Zeit*fenstern* und denken dabei bereits räumlich. Das verwundert nicht, wenn wir bedenken, dass wir die meisten Informationen, die wir tagtäglich aufnehmen, *sehen*. Und weil wir die Zeit nicht direkt sehen können, wandeln wir sie in etwas um, was wir mit den Augen wahrnehmen können. Es gibt zig verschiedene Ausführungen von Uhren, alle haben eines gemein: Sie stellen Zeit räumlich dar.

Eine Uhr zu lesen ist nicht einfach. Was man sieht, ist ja nicht die Zeit, es ist ja nur die Darstellung von Zeit! Wenn Kinder im Grundschulalter lernen, wie man eine Uhr liest, entspricht das der Interpretation eines t-s-Diagrammes.

Im Diagramm ist keine Hügellandschaft dargestellt, sondern eine Pendelbewegung. Ein kleines Kind kann das noch nicht verstehen. Es sieht Wellen oder Berge und Täler. Es erfordert ein Abstraktionsvermögen, in diesem Bild (Schaubild) eine Hin- und-her-Bewegung zu sehen, die durch eine t-Achse räumlich aufgelöst wird. Die Zeitachse entspricht der fortschreitenden Zeit, einer Zeitaufzeichnung, kurz: einer Uhr!

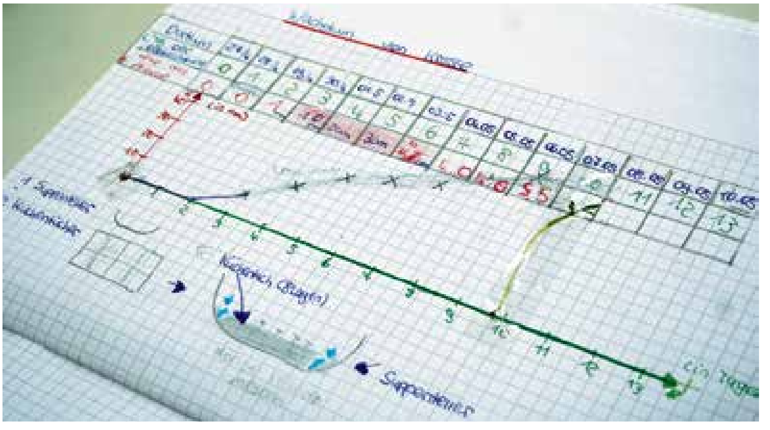


20.2 Wachstum von Kresse

Über einen Zeitraum von zwei Wochen wird das Wachstum von Kresse beobachtet und als Graph dargestellt.

Vorbereitung

Im Unterricht werden Kressesamen verteilt. Jeder Schüler erhält ca. einen halben Teelöffel, den er in ein selbstgebasteltes Papiertütchen füllt.



Ins Schulheft werden eine Tabelle und ein großes Koordinatensystem gezeichnet. Im Bild wurde entsprechend einer Fußgängerampel (unten „grün“, oben „rot“) für die Zeit (t-Achse) Grün und die Höhe (h-Achse) Rot verwendet. Die Spaltenbreite der Tabelle beträgt 1,5 cm und sollte mit der Einheit der Achsen übereinstimmen, so dass die Tabelleneinträge genau über dem jeweiligen Tag stehen.

Datum								
Tag der Beobachtung	0	1	2	3	4	5	6	…
Höhe der Pflanze in mm	0							

Wer noch nie einen Vorgang über längere Zeit beobachtet hat, weiß die zusätzliche Datumsangabe wahrscheinlich nicht zu schätzen. Mitunter weiß man am nächsten Tag nicht sicher, ob man das Wachstum vermessen hat oder nicht. Falls tatsächlich einmal ein Tag vergessen wurde, so bleibt dieser frei.

Am Tag 0 sind natürlich alle „Pflanzen“ gleich hoch, daher kann bereits im Unterricht der erste Eintrag in die Tabelle erfolgen. Schließlich zeichnet jeder Schüler in das leere Diagramm seinen vermuteten Wachstumsverlauf als Kurve ein. Die fiktive Vorhersage steigert das Interesse: Man kann sich nur dann überraschen lassen, wenn man sich zuvor Gedanken gemacht hat.

fiktive Vorhersage

Anbau der Kresse

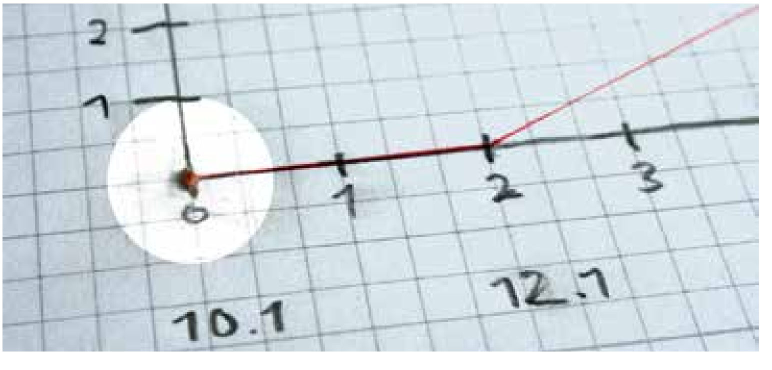
Gepflanzt wird zu Hause in einem Suppenteller auf mindestens acht Lagen Küchenpapier, alternativ geht auch Toilettenpapier. Auf das mit Wasser getränkte Papier werden die Samen gestreut.

fixer Beobachtungszeitpunkt

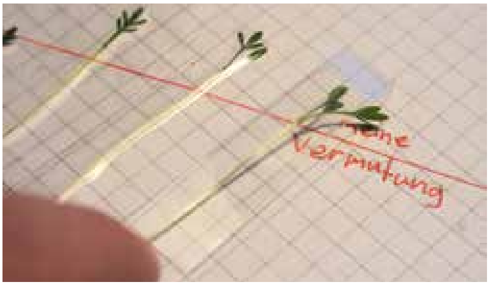
Der Standort der Kresse sollte während der Beobachtung nicht verändert werden, ebenso nicht der Beobachtungszeitpunkt. Am besten pflanzt man daher die Kresse am Abend, vielleicht kurz bevor man zu Bett geht.

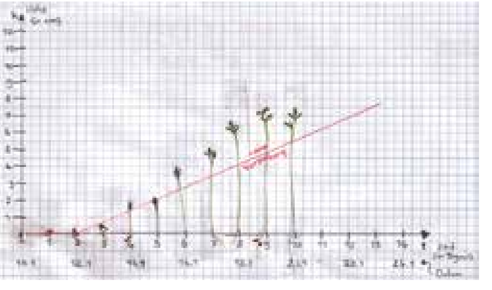
Beobachtung des Wachstums

An jedem Tag wird die durchschnittliche Höhe des „Kressewäldchens" in die Tabelle eingetragen. Stärker als „nur" zu messen und Kreuzchen in das Schaubild einzutragen ist es, wenn jeden Tag ein ty-



pischer Repräsentant ausgewählt und ins Heft eingeklebt wird. Dementsprechend wird am Tag null ein Kressesamen fixiert.
Wenn die Pflanzen größer werden, können sie zuerst auf dem Klebestreifen fixiert bzw. gerade gezogen und dann eingeklebt werden.





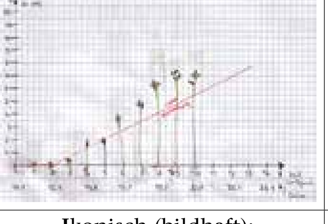
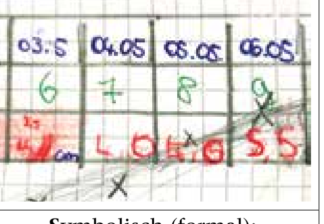
Bemerkungen, Hintergründe und Erweiterungen

Grüne und rote Achsen

Die Farbkodierung grün-rot legt zusammen mit dem Bild der Ampel eine Aufteilung in Oben und Unten nahe: Die untere „grüne“ Zeit wird auf die „rote“ Pflanzenhöhe nach oben abgebildet. – Die Übung in Abschnitt 20.3 geht noch einen Schritt weiter: Dort werden Zeit und Ort nicht nur unterschiedliche Farben, sondern auch unterschiedliche Rollen gegeben.

EIS-Prinzip

Vermittelt wird auf drei Ebenen des **EIS**-Prinzips nach Bruner:

		
Enaktiv (handelnd): Kressewachstum zu Hause	**I**konisch (bildhaft): Kressepflanzen gepresst im Heft	**S**ymbolisch (formal): Tabelleneinträge

gestaltpsychologische Verknüpfung

Die verschiedenen Ebenen sind mit Hilfe gestaltpsychologischer Gesetze miteinander verknüpft. So ist z. B. die ikonische Ebene mit der symbolischen über das Gesetz der Ähnlichkeit (Farbkodierung) verbunden. Da das Ernten eines Pflänzchens mit dem Einkleben und dem Tabelleneintrag zeitlich zusammenfällt, werden alle drei (!) Ebenen mit dem Gesetz der Gleichzeitigkeit zusätzlich verknüpft. Dingen, die gleichzeitig geschehen, wird unmittelbar ein Zusammenhang unterstellt.[1]

Erweiterung ins Abstrakte

Nach dem Experiment kann der Lehrer unterschiedliche Schaubilder an die Tafel zeichnen und nach dem Wachstum der Pflanze fragen. Bei mir lachten die Schüler, als ich eine Welle (Sinus) zeichnete: Ab einem bestimmten Zeitpunkt wächst die Pflanze rückwärts, und nicht auf die Höhe null, sondern sie gräbt sich auch noch unter die Erde ein. Man überlege sich die Bedeutung: Die Schüler geben durch Lachen die Rückmeldung, dass sie das Wesentliche verstanden haben. Ein hübsches Beispiel für nonverbale Kommunikation!

Rückmeldung durch Lachen

Material ist fächerübergreifend

Wenn man mit Material arbeitet, berührt man prinzipiell immer andere Fächer. Verschiedene Fächer bzw. Disziplinen stellen ja nur unterschiedliche Perspektiven dar, aus denen beobachtet wird. So kann das Wachstum von Kresse auf Biologie (Was braucht eine Pflanze zum Wachsen?), Physik (Wachstumsgeschwindigkeit), Religion (Der Mensch braucht Nahrung), Mathematik, Erdkunde (In welchen Erdteilen kann Kresse wachsen?), Deutsch (Beschreibung der Vorgehensweise) … projiziert werden.

unterschiedliche Perspektiven

Man kann es auch anderes herum sehen: Alle Projektionen vereinen sich im Material. Aus diesem Grund ist der Umgang mit Material immer fächerübergreifend. Und zwar nicht deswegen, weil er künstlich geschaffen wurde, sondern weil er natürlich ist. Die unterschiedlichen Disziplinen haben sich mehr und mehr vom Konkreten, dem Materiellen, distanziert. Und so besteht natürlich die Gefahr, dass für den Schüler das Wachstum in Mathematik nichts mit Biologie oder Physik zu tun hat.

5 Das geschieht auch, wenn kein Zusammenhang existiert: Es klingelt an der Tür und ein Glas fällt herunter. Aus didaktischer Sicht ist ein Bezug nicht immer erwünscht, aber die Bildung eines Bezuges liegt aus konstruktivistischer Sicht in der Macht des Lernenden. Anders formuliert: Wenn zwei Dinge gleichzeitig stattfinden, dann wird man als Lehrer schwer die Konstruktion eines Bezuges im Schülerhirn verhindern können …

Kompetenzorientierung

Durch konkretes Handeln werden viele Kompetenzen gefördert und zwar von selbst. Wenn Sie wollen, können Sie in der Übersicht zunächst die unterste Zeile abdecken, sich überlegen, welche Kompetenzen in diesem Unterricht eine Rolle spielen, und Ihre eigenen Kreuzchen setzen.

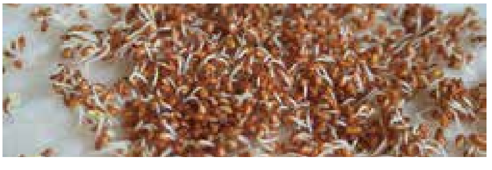
Sozialkompetenz			Methodenkompetenz				Personale Kompetenz				Kognitive Basiskompetenz				Berufsfeldbezogene Kompetenz				
Kommunikationsfähigkeit	Kritik- und Konfliktfähigkeit	Teamfähigkeit	Planungsfähigkeit	Problemlösefähigkeit	Präsentationsfähigkeit	Durchhaltevermögen	Selbstständigkeit	Ordentlichkeit	Verantwortungsfähigkeit	Konzentrationsfähigkeit	Räumliches Vorstellungsvermögen	Merkfähigkeit	Schlussfolgerndes Denken	Handwerklich-technische Fähigkeit	Untersuchend-forschende Fähigkeit	Kreativ-sprachliche Fähigkeit	Pädagogisch-helfende Fähigkeit	Führend-verkaufende Fähigkeit	Kaufmännisch-verwaltende Fähigkeit
x	(x)	(x)	x	x	x	x	x	x	x	(x)	x		(x)	x	x		(x)		x

Vielleicht hätten Sie das ein oder andere Kreuzchen anders gesetzt, wesentlich ist jedoch: Wenn man den Schüler in seiner Lebenswelt in den Mittelpunkt stellt, würde man sich in einer handlungs- und erlebnisorientierten Didaktik sehr schwer damit tun, Kompetenzen *nicht* zu schulen. Die gute Nachricht: Sie müssen nicht „zu Kreuze“ kriechen, wenn Sie kompetenzorientiert unterrichten. Die Kompetenzorientierung ist in diesem Unterrichtskonzept in natürlicher Weise enthalten. Versuchen Sie einmal, handlungs- und erlebnisorientiert zu unterrichten, *ohne* dabei kompetenzorientiert zu sein!

Handlungsorientierung enthält Kompetenzorientierung

Freude am Wachstum

Ich habe erst durch meinen Sohn erfahren, welche Freude die Aufgabe bereiten kann. Vielleicht geht es nicht jedem so, aber manch einer schaut direkt nach dem Aufstehen, ob sich etwas getan hat. Das „Gärtnern“ passt in die Unterstufe. Hier der erste und der zweite Tag:



Funktionsdefinition

Zeichnet der Lehrer als Übung eine Schleife oder ein Herzchen als Schaubild ins Diagramm, sorgt das wieder für Gelächter. Die Schüler finden von selbst die Antwort, dass „die Pflanze ja nicht an einem Tag zwei verschiedene Höhen besitzen kann“. Und das ist nichts weiter als eine kindgerechte Formulierung der Eindeutigkeit im Funktionsbegriff[2].

kindgerechte Formulierung der Eindeutigkeit

Ableitung und Wachstumsgeschwindigkeit

Zu welchem Zeitpunkt ist die Pflanze am schnellsten gewachsten? Fragen dieser Art können leicht beantwortet werden. Bereits in der fünften oder sechsten Klasse kann auf diese Weise anschaulich eine Kurvendiskussion durchgeführt werden. So entspricht der Wendepunkt im Schaubild einem Extremum der Wachstumsgeschwindigkeit bzw. der Ableitung. Ebenso kann monotones Wachstum angesprochen werden. Auch wenn keine Fachbegriffe verwenden werden: Es schwingen hier wesentliche Züge der Differentialrechnung mit.

Kurvendiskussion in der Unterstufe

Ernte

Gerüche und Geschmäcke prägen sich nachhaltig ein. Ob mit dem Vesperbrot Schaubilder und Funktionen gleich mit einverleibt werden? Wohl kaum. So direkt geht es leider doch nicht. Aber zumin-

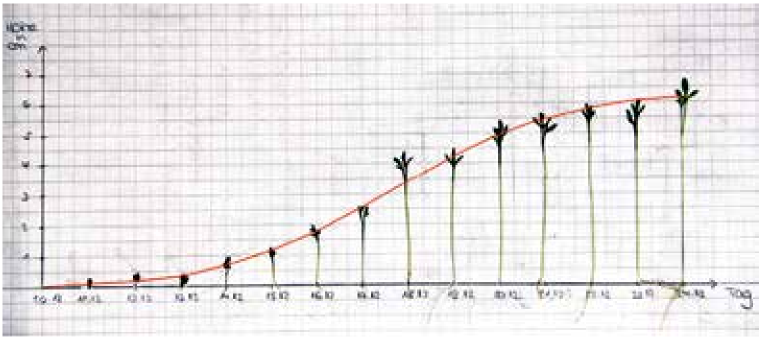
6 Jedem Element einer Menge (hier: Tage) wird *genau* ein Element einer anderen Menge (hier: Pflanzenhöhe) zugeordnet.

dest wird klar ein Bezug zur Alltagswelt geschaffen. Irgendwie hat das da auf meinem Brot mit Mathematik zu tun. Und wenn das für essbare Kresse gilt, dann haben Pflanzen und Ernährung vielleicht ganz allgemein mit Mathematik zu tun.

Bezug zur Alltagswelt

Höhere Klassen – Differenzierung durch Material
Die Übung wurde in diesem Abschnitt für die Umsetzung in der Unterstufe gezeigt. Ändert man die Fragestellung z. B. in eine mathematische Modellierungsaufgabe ab, lässt sich Kresse auch in der Sekundarstufe II anpflanzen: Wie lautet eine mögliche Funktionsvorschrift für das dargestellte konkrete Wachstum?[3]

Modellierungsaufgabe



Einfacher als die Modellierung ist der Bezug von mathematischen Begriffen auf das konkrete Beispiel. Was bedeutet hier Monotonie, was bedeuten Wende- und Extremstellen, was die erste, was die zweite Ableitung? Man zeichne die Wachstumsgeschwindigkeit als Funktion der Zeit auf. Hat die Fläche unterhalb der Kurve eine Bedeutung?

mathematische Begriffe aufs Beispiel beziehen

7 Vgl. „Modellieren von Kressewachstum“ in Abschnitt 23.5.

„Wissen wächst. Der Lehrer ist nicht dazu da, den Stoff zu vermitteln; seine Aufgabe besteht vielmehr darin, zwischen Schülern und Wissen zu vermitteln“, so Martin Kramers didaktisches Credo. Sein erlebnispädagogisches Konzept von *Unterricht als Abenteuer* vermittelt Schülern handlungsorientiert und gruppendynamisch, wie sie Strukturen erkennen und verstehen können. Spielfreude, Kooperation und Persönlichkeitsentwicklung sind dabei die Eckpfeiler seiner konstruktivistischen Didaktik.

Band III bietet praxiserprobte Anregungen unter anderem zu folgenden Themen:
Funktionen: Einführung in Koordinatensysteme und Funktionen; Bewegungsabläufe aufzeichnen; Schaubilder handelnd verstehen; Differentialrechnung; Exponentialfunktionen und Wachstum; Projektion einer Drehung: Sinus- und Kosinusfunktion
Wahrscheinlichkeit: Lotto im Klassenraum; Verschlüsselungsverfahren; Kombinatorik mit Münzen und Stühlen; Unabhängigkeit und Stichproben; Binomialverteilung u. a.

„Das Fachliche wird sorgfältig durchdrungen und die wirklich schwierigen und wesentlichen Dinge breit behandelt. Es geht also nicht um Rosinen der Mathematik, sondern um den Stoff, der im Bildungsplan festgeschrieben ist.“

Prof. Dr. sc. math. Peter Gallin

Mathematik als Abenteuer richtet sich an Lehrende, Referendare, Lehramtsstudierende sowie an Fortbildner und Fachleiter, die Anregungen für Lernumgebungen suchen und ihren Unterricht mit mehr Wertschätzung und Verantwortung auf Seiten der Schüler gestalten möchten.

Mathematik als Abenteuer besteht aus mehreren Bänden. **Band I**: Geometrie und Rechnen mit Größen; **Band II**: Algebra und Vektorrechnung.

ISBN 978-3-7800-4847-9