

<b>Vorwort</b> (von Michael Gaidoschik) .....	10
<b>1 Einleitung</b> .....	13
1.1 Anliegen .....	14
1.2 Eine kurze Übersicht über diesen Band .....	15
<b>2 Entwicklungs- und Kompetenzorientierung</b> .....	21
2.1 Motive, Motivationen und subjektive Logik .....	22
2.1.1 Motive der Kinder aufgreifen .....	22
2.1.2 Von der subjektiven Logik in die „Zone der nächsten Entwicklung“ .....	24
2.1.3 Deutung von Erhaltungsfragen .....	25
2.1.4 Konsequenzen für die mathematische Frühförderung .....	31
2.2 Einstellung zur Mathematik .....	33
<b>3 Grundlegende Konzepte und Strategien</b> .....	35
3.1 Operative Muster ohne Zahlen .....	37
3.1.1 Seriations-Operationen .....	38
3.1.2 Zusammenspiel von Seriation und Klassifikation .....	43
3.1.3 Lernumgebung „Musterschlangen“ .....	44
3.1.4 Klassifikations-Operationen .....	46
3.2 Aspekte des Zahlbegriffs .....	50
3.2.1 Ordinaler Zahlaspekt .....	52
3.2.2 Kardinaler Zahlaspekt .....	52
3.2.3 Relationszahlaspekt .....	54
3.3 Zählentwicklung: Zählen ist nicht gleich Zählen .....	55
3.3.1 Verbales Zählen: Vom Singsang zum rechnenden Zählen .....	55
3.3.2 Zählprinzipien regeln das Tun .....	57
3.3.3 Zahlsymbole lesen, schreiben und ordnen .....	60
3.3.4 Fazite .....	60
<b>4 Mathematische Entwicklungen bis Schulbeginn</b> .....	63
4.1 Früheste Fähigkeiten .....	65
4.1.1 Mengendiskriminierung .....	65
4.1.2 Erkennen von Mengenveränderungen .....	65

4.2	Vorschulische Kompetenzentwicklung .....	66
4.2.1	Basisfertigkeiten .....	66
4.2.2	Anzahlkonzept und Argumente zur Erhaltung .....	70
4.2.3	Beziehungen zwischen Anzahlen .....	74
4.2.4	Bedeutung des Entwicklungsmodells .....	74
4.3	Vorschulische Standorte .....	76
4.3.1	Fragen .....	76
4.3.2	Theoriebezüge und Untersuchungsplan .....	77
4.3.3	Diagnostische Aufgaben und Ergebnisse .....	77
4.3.4	Diskussion .....	89
4.4	Heterogenität beim Schuleintritt .....	91
4.4.1	Einteilung in „Frührechner“ und „Spätrechner“ .....	92
4.4.2	Heterogenität in vier Kompetenzniveaus .....	95
4.4.3	„Mathematische Cleverness“ .....	98
4.5	Rückschau und Vorschau .....	107
<b>5</b>	<b>Strategien in Grundoperationen</b> .....	<b>109</b>
5.1	Rechenverfahren geben Signale .....	111
5.2	Zählstrategien .....	112
5.2.1	Varianten von „Alles-Zählen“ .....	113
5.2.2	So geht's einfacher: Weiterzählen vom ersten Summanden .....	114
5.2.3	„Quantensprung“: Weiterzählen vom größeren Summanden .....	114
5.3	Statischer Fingergebrauch .....	116
5.4	Mentale Gliederungsfähigkeit .....	119
5.4.1	Bedeutung und Begründung .....	119
5.4.2	Gliedern als Denkschulung .....	125
5.4.3	Visuelles Operieren .....	129
5.4.4	Eigenproduktionen .....	137
5.4.5	Lernumgebung „Auf einen Blick“ .....	140
5.4.6	Eigenproduktionen zum „Blitzen“ am 100er-Feld .....	142
5.4.7	Lernumgebung „Würfelhäuser“ .....	149
5.5	Operative Ableitstrategien .....	153
5.5.1	Mit Mustern rechnen .....	153
5.5.2	Voraussetzungen aufbauen .....	157
5.5.3	Produktive „Ableitkultur“ .....	159
5.5.4	Eigenproduktionen .....	161

5.6	Automatisierung von „Kernaufgaben“ .....	176
5.7	Strategiewahl .....	181
5.7.1	Strategie- <i>Bewusstheit</i> und Entscheidungs- <i>Freiheit</i> .....	181
5.7.2	„Typische“ Strategiewahlen .....	182
5.7.3	„Rückzieher-Strategie“ .....	186
5.7.4	10er-Übergang – ein Spezialfall? .....	187
5.7.5	Strategien gezielt herausfordern .....	189
<b>6</b>	<b>Didaktik zur Strategie-<i>Bewusstheit</i></b> .....	<b>191</b>
6.1	Konstruktivistisch orientierte Fachdidaktik .....	193
6.1.1	Aktives und konstruktives Lernen .....	193
6.1.2	Didaktische Einstellung und Umsetzung .....	196
6.2	Vielfältige Reflexionsmöglichkeiten .....	198
6.2.1	Sprachliche Reflexion erweitern .....	198
6.2.2	Lernumgebung „Einkaufen“ .....	203
6.2.3	Kompetenzorientierung in Bildungsstandards .....	206
6.3	Dialogisches Lernen .....	208
6.3.1	Vom Singulären zum Regulären .....	208
6.3.2	Lernen mit Reisetagebüchern .....	210
6.3.3	Dialogisches Lernen in Mathekonferenzen .....	211
6.4	Potenzial von Lernumgebungen .....	214
6.4.1	Reichhaltige Aufgaben .....	214
6.4.2	Spiralprinzip und natürliche Differenzierung .....	216
6.4.3	Konsequenzen für die Lernbegleitung .....	219
6.4.4	Vision einer mathematischen Lernkultur .....	225
6.5	Integrativer Mathematikunterricht .....	228
6.5.1	Kompetenzorientierung .....	228
6.5.2	Formen der Lehrmittelnutzung .....	230
6.5.3	An- und Vorzeichen einer Rechenschwäche .....	232
6.5.4	Unterricht als Quelle von Rechenschwierigkeiten .....	236
6.5.5	Negative Lerndynamik wenden .....	236
<b>7</b>	<b>Die zentralen Anliegen dieses Buches</b> .....	<b>241</b>
	<b>Anhang</b> .....	<b>245</b>

# Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

## Abbildungen

Abb. 1	Invarianzversuche von Piaget .....	26
Abb. 2	Nach dem Kriterium „voll“ passen die Würfelbilder links zum Ballonbild .....	27
Abb. 3	Vertauschungsgesetz als Perspektivenwechsel .....	30
Abb. 4	Auf ein Merkmal zentrierte und auf zwei Merkmale dezentrierte Reihenfolge .....	38
Abb. 5	Dreieckszahlen .....	42
Abb. 6	Aufreihung der Zahlen und hierarchisch organisierte Begrifflichkeit .....	44
Abb. 7	Hierarchisch organisierte Klassifikation .....	47
Abb. 8	Merkmalskombinationen in den Quarto-Spielklötzen .....	48
Abb. 9	Mögliche Musterverläufe und -regeln .....	48
Abb. 10	Zahlen mit bloßer Labelfunktion .....	51
Abb. 11	Zähl-zahlen als An-zahlen und Systematik der Kardinalzahlen .....	53
Abb. 12	Kardinal-, Ordinal- und Relationszahlaspekt .....	54
Abb. 13	Vergleichsschema nach Resnick (1989): Je nachdem ist 5 viel oder wenig .....	69
Abb. 14	Entwicklung mathematischer Grundkompetenzen nach Krajewski (2008) .....	71
Abb. 15	Zunahme-Abnahme-Schema .....	72
Abb. 16	Teil-Ganzes-Schema als Komposition verschieden langer Legosteine .....	72
Abb. 17	Aussagekraft von mathematischen Grundkompetenzen .....	75
Abb. 18	Design der deutsch-australischen Vergleichsuntersuchung .....	77
Abb. 19	Zuordnung von Zahlsymbolen zu Mengenbildern .....	84
Abb. 20	Schulmathematische Kompetenzen 6 Wochen nach Schuleintritt .....	94
Abb. 21	Gezählten Elementen Zahlsymbole bis 10 zuordnen .....	95
Abb. 22	Identifizierung des 8. Pilzes .....	95
Abb. 23	Gezählte Kollektion mit einem Zahlsymbol verbinden .....	96
Abb. 24	In Zahlenreihen fehlende Zahlen einsetzen .....	96
Abb. 25	Lösbare Operationen auf Kompetenzniveau III .....	97
Abb. 26	Additionen und Subtraktionen über 20, ohne 10er-Übergang .....	97
Abb. 27	Fortsetzung von Zahlenreihen mit 10er-, 2er-, 3er- und 5er-Schritten, Niveau IV .....	97
Abb. 28	Verteilung der vier Kompetenzniveaus bei Schuleintritt .....	98
Abb. 29–41	Utrechter Testaufgaben .....	99–103
Abb. 42	Effektive Schülerleistungen und Prognosen der Lehrkräfte .....	104
Abb. 43	Unterschiedliche Klassendurchschnitte beim „Utrechter Test“ .....	105
Abb. 44	Klassenprofil L10 .....	106
Abb. 45	Klassenprofil L17 .....	106
Abb. 46	Wendeplättchen auf dem 20er-Feld .....	120
Abb. 47	Schülerbeispiel zur „Anzahlerfassung“ bei Würfelbildern .....	122
Abb. 48	Kulturhistorisch übermittelte Zahlendarstellungen .....	123
Abb. 49	Unstrukturierte, lineare und Würfelbild-Anordnung der Anzahl 5 .....	125
Abb. 50	Muster der Objektivierung im Zahlenraum .....	127
Abb. 51	Anzahlerfassung ohne Strukturierungswissen .....	127
Abb. 52	Anzahlerfassung mit Strukturierungswissen .....	127
Abb. 53	Optische Täuschungen fördern zur aktiven Wahrnehmung heraus .....	128
Abb. 54	„Konstruktivistischer Zirkel der Erkenntnisgewinnung“ .....	129
Abb. 55	Möglichkeiten, keines bis alle Augen im 5er-Würfelbild anzumalen .....	130
Abb. 56	Gliederung einer Anzahl in simultan erfassbare Einheiten mit anschließendem Auszählen .....	131
Abb. 57	Von simultan erfassbaren Einheiten zur „guten Gestalt“ .....	131
Abb. 58	Figurative Prototypen .....	132
Abb. 59	Visuelles Operieren .....	133

Abb. 60	Visuelles Operieren an der Zahlenmauer .....	134
Abb. 61	Visuelles Operieren am Rechendreieck .....	135
Abb. 62	Visuelles Operieren an der Vierfeldertafel .....	136
Abb. 63a	Anweisungs- und Protokollbogen zur Vierfeldertafel .....	136
Abb. 63b	Arbeitspass für Aufträge und Protokolle (im DIN-A4-Format) .....	136
Abb. 64	Strukturierte Anzahlen aus der CD-ROM Blitzrechnen .....	138
Abb. 65	Gestaltungsmöglichkeiten zur Strukturierung von Anzahlen: A mit Farbe, B mit Abständen, C mit Größen und D mit Formen .....	138
Abb. 66	Prüfung der „Güte“ des 8ers mit dem „Blitz-Blick“ .....	139
Abb. 67/68	Vorher-Nachher-Vergleich eines 5ers und eines 8ers mit „Blitz-Blick“ .....	139
Abb. 69	Gliederungen von Lena .....	141
Abb. 70	Lösungen von Marvin .....	141
Abb. 71	100er-Feld mit vielen Referenzen .....	143
Abb. 72	100er-Feld mit je einer 1er- und 10er-Position als Referenz .....	143
Abb. 73	100er-Feld mit jedem zweiten 1er und 10er als Referenz .....	144
Abb. 74	100er-Feld mit 10er-Zeilen .....	144
Abb. 75	100er-Feld mit 1er-Spalten .....	144
Abb. 76	100er-Feld mit Quadranten .....	144
Abb. 77	Leeres 100er-Feld .....	145
Abb. 78	Aus dem Gedächtnis gezeichnetes 100er-Feld .....	145
Abb. 79	100er-Punktefeld mit gefärbter Anzahl .....	147
Abb. 80	100er-Punktefeld mit überstrichenen Zehnern .....	147
Abb. 81	Angefärbte Hälften in 100er-Feldern, von 3./4.-Klässlern .....	148
Abb. 82	Grundrissplan eines Würfelhauses .....	149
Abb. 83	Konkretes Würfelhaus nach Plan bauen .....	149
Abb. 84	Systematik der Aufträge .....	150
Abb. 85	Bauplan und Würfelhaus für das 2. Bildungsjahr im Kindergarten .....	150
Abb. 86	Spielideen zu Ableitstrategien .....	161
Abb. 87	Einspluseinstafel .....	165
Abb. 88	Eingefärbte Wege in der Plustafel von Jan .....	168
Abb. 89	Jans Übertragung der Wege in „Rätsel-Päckchen“ .....	168
Abb. 90	Multiplikative Beziehungen von Gianluca .....	174
Abb. 91	Jan beschreibt eine multiplikative Beziehung .....	174
Abb. 92	Multiplikative Beziehungen von Miranda .....	175
Abb. 93	Flavias Verwandtschaften .....	175
Abb. 94	Flurinas Verwandtschaften .....	175
Abb. 95	Einmaleins-Tafel .....	178
Abb. 96	Strategietypen im Zahlenraum bis 10, Ende der 1. Klasse .....	184
Abb. 97	Strategietypen im Zahlenraum 10 bis 20, Ende der 1. Klasse .....	184
Abb. 98	Strategien beim 10er-Übergang, Ende der 1. Klasse .....	188
Abb. 99	Strategien bei $6 + 6$ , Ende der 1. Klasse .....	188
Abb. 100	Strategien bei $6 + 7$ , Ende der 1. Klasse .....	188
Abb. 101	Modell der Annäherung an eine Vision .....	197
Abb. 102	Erweitertes Reflexionsmodell als „EISS-Prinzip“ .....	200
Abb. 103	Kinder übersetzen Mitte der 1. Klasse Rechnungen in Bilder und Geschichten .....	202
Abb. 104	Prozess der Mathematisierung beim Sachrechnen .....	203
Abb. 105	Einkauf mit Warenangebot zum Einheitspreis 1 .....	205
Abb. 106	Gezeichnete Einkaufsliste .....	205
Abb. 107	Geschriebene Einkaufsliste mit Würfelbildern als Preisen .....	205
Abb. 108	Einkaufsliste zu vorgegebenem Budget von 20 Schweizer Franken .....	206

Abb. 109	Mathematische Kompetenzen in Bildungsstandards der KMK und nach HarmoS .....	207
Abb. 110	Dialogisches Prinzip: „Vom Singulären zum Regulären“ .....	209
Abb. 111	Traditionelle innere Differenzierung und natürliche Differenzierung .....	217
Abb. 112	Frontalunterricht und dezentrierte Phasen .....	221
Abb. 113	Konstruktivistische und belehrende Lernbegleitung .....	221
Abb. 114	Formen der Lehrmittelnutzung .....	230
Abb. 115	Negative Lerndynamik .....	237

## Tabellen

Tab. 1	Verschiedene Zahlaspekte .....	51
Tab. 2	Zählfehler wegen misslungener Eins-zu-eins-Korrespondenzen .....	58
Tab. 3	Zählkompetenzen bei Schuleintritt .....	61
Tab. 4	Entwicklung der Kardinalität .....	68
Tab. 5	Aufgaben des Basisinterviews ENRP .....	78 f.
Tab. 6	Lösungshäufigkeiten zu einfachen Zählaufgaben, Mengenvergleich, Invarianz .....	80
Tab. 7	Lösungshäufigkeiten zu Muster erkennen und fortsetzen .....	81
Tab. 8	Lösungshäufigkeiten zu Ordinalzahlen .....	82
Tab. 9	Lösungshäufigkeiten zur (Simultan-)Erfassung .....	83
Tab. 10	Lösungshäufigkeiten zur Zuordnung von Zahlsymbolen zu Mengenbildern .....	84
Tab. 11	Lösungshäufigkeiten zur Zahlenfolge von 1 bzw. 0 bis 9 .....	85
Tab. 12	Lösungshäufigkeiten zu Teil-Ganzes-Beziehungen .....	86
Tab. 13	Lösungshäufigkeiten zur Benennung Vorgänger – Nachfolger .....	87
Tab. 14	Lösungshäufigkeiten zur Seriation (nach Länge ordnen) .....	88
Tab. 15	Lösungshäufigkeiten zu Zählkompetenzen .....	89
Tab. 16	Aufgaben von Stamm (2005, vgl. 2007) .....	92 f.
Tab. 17	„Rangliste“ korrekt gelöster Aufgaben .....	105
Tab. 18	Verteilung der beiden Varianten des Weiterzählens Mitte und Ende der 1. Klasse .....	115
Tab. 19	Dynamische Zählstrategien und „statischer Fingergebrauch“ bei der Addition .....	117
Tab. 20	Operativ strukturierte Päckchen .....	155
Tab. 21	Voraussetzungen des Regelverständnisses im Einspluseins .....	158
Tab. 22	Strukturierung der Summen mit Reihenfolgezahlen .....	163
Tab. 23	Schülerinnen und Schüler erklären ihre Rechenwege .....	171
Tab. 24	Genutzte multiplikative Beziehungen vor der unterrichtlichen Behandlung .....	172
Tab. 25	Faktennutzung und Zählstrategien im Verlauf des 1. Schuljahres .....	182
Tab. 26	Mathekonzferenz zur Lernumgebung „Einkaufen“ .....	212 f.
Tab. 27	Gegenüberstellung der traditionellen inneren und der natürlichen Differenzierung .....	218
Tab. 28	Sicht der Lernenden auf zwei unterschiedliche Differenzierungsmotive .....	219
Tab. 29	„Frühe“ Kompetenzerfassung und „späte“ Anzeichen erheblicher Rechenschwierigkeiten .....	234 f.
Tab. 30	Begründungen von Misserfolg in Attribuierungskategorien .....	238