Einführung: Mathematische Denkprozesse von Kindern

Marcus Nührenbörger, Ralph Schwarzkopf

Wie entsteht Mathematik im Denken der Kinder und wie entwickelt sich mathematisches Denken weiter? Auch wenn diese Frage sicher niemand erschöpfend beantworten kann, so ist es doch notwendig und möglich, den mathematischen Strukturen kindlichen Denkens ein wenig näher zu kommen und wesentliche Facetten der Lehr- und Lernprozesse herauszuarbeiten, durch die man Schwierigkeiten und Chancen bei der Unterstützung mathematischer Lernprozesse besser verstehen kann. Dieses Buch wird hierzu Einblicke geben, indem grundlegende Perspektiven diskutiert und exemplarisch Lehr- und Lernprozesse im Spiegel der Praxis beleuchtet werden. Es stellt gewissermaßen einen Startpunkt dar, von dem aus die Leserschaft eigenständig weiterforschen kann. Die Beiträge des Buches lassen sich dabei ganz grob zwei verschiedenen Bereichen der Mathematikdidaktik zuordnen: dem konstruktiven Bereich, in dem Lernumgebungen für das Mathematiklernen konstruiert und weiterentwickelt werden, und dem rekonstruktiven Bereich, der aus der Analyse von real stattfindenden Lehr- und Lernprozessen theoretische Erkenntnisse über das Mathematiklernen gewinnt. Beide Bereiche sind insbesondere dadurch miteinander verbunden, dass der Lerninhalt, das durch den Unterricht aufzubauende Verständnis von Mathematik, im Zentrum der Überlegungen steht.

Was sollen die Kinder im Mathematikunterricht lernen?

In einem modernen Mathematikunterricht reicht es sicher nicht aus, den Kindern etwa im Arithmetikunterricht unterschiedliche Verfahrensregeln mitzuteilen, die sie nach einer gewissen Übungszeit nutzen können, um wie ein Taschenrechner automatisiert Ergebnisse von verschiedenen Rechenaufgaben zu bestimmen. Es geht vielmehr darum, dass die Kinder mathematische Strukturen und Muster kennenlernen, dass sie Begriffe als Beziehungen zwischen mathematischen Objekten, zwischen Zahlen und Termen, verstehen lernen und – natürlich mit der Hilfe der Lehrkraft – elementare, zugleich aber auch immer schon theoretische Einsichten in das Fach Mathematik gewinnen. Mit den Worten von Steinbring (2005): Mathematiklernen kann im Kern als ein sich zunehmend ausdifferenzierender Deutungsprozess mathematischer Strukturen und Verallgemeinerungen gesehen werden.

Ein Beispiel für solche Beziehungen sind Vergleiche zwischen multiplikativen Termen, die bereits im Mathematikunterricht der Grundschule im Sinne einer operativen Variation von Rechenwegen thematisiert werden. So lernen Kinder in der Grundschule zwar die Einmaleinsreihen in einer gewissen Reihenfolge (zum Beispiel nach dem Grad der Schwierigkeit) kennen und lernen sie auswendig, um daran anschließend möglichst schnell und ergebnissicher isolierte Multiplikationsaufgaben lösen zu können. Hierdurch erweitern sie ihr Wissen allerdings lediglich sequenziell um immer neue Fakten, grob vergleichbar damit, wie sie nach und nach die Telefonnummern ihrer Freunde kennenlernen. Der Aufbau eines Beziehungssystems gelingt den Kindern hingegen nur dann, wenn sie im Unterricht operative Beziehungen zwischen den Aufgaben entdecken und nutzen lernen. Dann können sie ein vernetztes Verständnis vom mathematischen Konzept der Multiplikation aufbauen. Hierzu gehören elementare Rechengesetze, mit deren Hilfe sich Beziehungen zwischen verschiedenen Multiplikationsaufgaben herstellen und nutzen lassen: Die Aufgabe „$7 \cdot 5$“ ist dann beispielsweise nicht nur charakterisiert als „siebte Zahl in der Fünferreihe“, sondern auch und vor allem durch ihre Beziehung zu anderen Multiplikationsaufgaben: $7 \cdot 5 = (7 \cdot 10) : 2$ oder $7 \cdot 5 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5$ oder $7 \cdot 5 = 10 \cdot 5 - 3 \cdot 5$ oder $7 \cdot 5 = (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 5))) - 5$ und so weiter.

Solche Beziehungen entstehen nicht einfach „reibungslos“ aus einem konkreten, sachlichen Blickwinkel auf die Multiplikation, wenn sie etwa nur als Beschreibung einer zeitlich sukzessiven Abfolge von Tätigkeiten im Sinne der fortgesetzten Addition thematisiert wird. Sie können aber auch nicht völlig losgelöst von umweltlichen, konkreten und handlungsorientierten Erfahrungen der Kinder entstehen, wenn diese die mathematische Welt der Zeichen und Symbole mit inhaltlicher Bedeutung füllen sollen.

Dass gleichwohl die von den Kindern selbst entwickelten Strukturen von Beginn an sehr abstrakt sein können, soll das nachfolgend beschriebene Dokument illustrieren. Erik, ein Schüler der zweiten Unterrichtsklasse, hat eigenständig und vor der systematischen Behandlung der Multiplikation in der Schule eine Rechenstrategie für „Aufgaben aus der Fünferreihe“ entwickelt (Abb. 1). Dazu nutzt er die zunächst konkret erscheinende Eigenschaft aus, dass 5 die Hälfte von 10 ist. Diese Beziehung zwischen zwei Zahlen erhält aber durch ihre Bedeutung für die Rechenstrategie einen theoretischen, mathematisch substantiellen Charakter für eine ganze Klasse von Multiplikationsaufgaben: Die Multiplikation mit 5 wird gesehen als eine Beziehung zwischen der aufgrund des Stellenwertsystems einfach durchzuführenden Multipli-

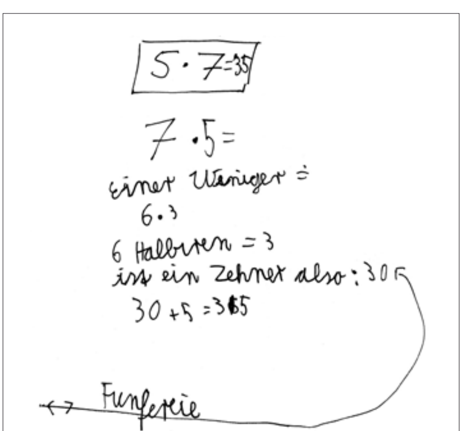

Abb. 1: Eriks Lösung der Aufgabe $5 \cdot 7$

kation mit 10 und den aus der ersten Klasse verfügbaren Operationen der Addition, Subtraktion und Halbierung von geraden Zahlen. Hierdurch konstruiert der Schüler eine abstrakte und beziehungsreiche Deutung von der Multiplikation mit 5, die man folgendermaßen nachvollziehen kann:

> 1. Schritt: Die Aufgabe aus der Siebenerreihe wird umgeschrieben als Aufgabe in der Fünferreihe; vermutlich um die für die Strategie zentrale 5 hervorzuheben. Hierbei nutzt Erik intuitiv das Kommutativgesetz der Multiplikation.
> 2. Schritt: Der Multiplikator 7 wird um 1 erniedrigt. Dies geschieht, um im nächsten Schritt eine Halbierung durchführen zu können; da die 7 ungerade ist, erscheint dem Schüler dieser Schritt hier notwendig.
> 3. Schritt: Die 6 wird halbiert – eine Notation für die Division ist dem Schüler noch nicht bekannt, das Halbieren dagegen bereits aus der ersten Klasse vertraut. Hier wählt Erik die Notation „6.3“, die er in der nächsten Zeile als Halbierung der 6 erläutert.
> 4. Schritt: Hier geschieht der eigentliche Rechentrick: Die 3 wird in einen Zehner umgewandelt – hierdurch wurde die Multiplikation der 6 mit 5 durchgeführt: $6 \cdot 5 = 6 \cdot (10 : 2) = 6 \cdot 10 : 2 = 6 : 2 \cdot 10 = (6 : 2) \cdot 10 = 3 \cdot 10$.
> 5. Schritt: Die eingangs vorgenommene Änderung des Multiplikators 7 wird rückgängig gemacht: Da bislang nur $6 \cdot 5$ berechnet wurde, muss zum Zwischenergebnis 30 noch ein Fünfer addiert werden, um mit 35 das Ergebnis der Eingangsaufgabe $7 \cdot 5$ zu erhalten.

Typisch an diesem Dokument ist, dass der Schüler sein Verständnis der mathematischen Strukturen – das im Kern ja darin besteht, dass die Operation „$\cdot 5$“ durch die Operationsfolge „$: 2 \cdot 10$“ ersetzt werden kann – nicht „unmittelbar“ mitteilt, vielmehr muss an allen Stellen in die von ihm exemplarisch beschriebene Abfolge der Rechenschritte heraus- und hineingelesen werden. Das Verständnis wird dem Adressaten des Dokuments nur dann „sichtbar“, wenn er um den Wert solcher Beziehungskonstruktionen zwischen Zahlen für das Mathematiklernen weiß; diese können auch dem Schüler erst dann vollends klar werden, wenn er in der Diskussion die Gelegenheit erhält, professionell moderiert über die mathematische Bedeutung seiner Strategie zu reflektieren. Sie gehen dagegen verloren, wenn man im traditionellen Sinne versucht, den Schülern einheitliche Vorgehensweisen beim Rechnen „beizubringen“, indem man etwa die auswendig gelernte Fünferreihe als Lösungsschema verpflichtet und vorgibt.

Jonah, ein Schüler der 2. Klasse, widmet sich wie Erik der Aufgabe – allerdings in der 2. Hälfte des Schuljahres zu einer Zeit, in der die Multiplikation mit 10 im Sinne der Kernaufgaben des Einmaleins thematisiert wird; diese stellt eine Basis für weitere unterschiedliche Interpretationen multiplikativer Terme zur Verfügung. Jonah schlägt vor, die Operationen „Verdoppeln“ und „Halbieren“ zu nutzen, um geschickt das Ergebnis zu ermitteln. Insofern knüpft seine Idee an den Trick von Erik an – ein Faktor

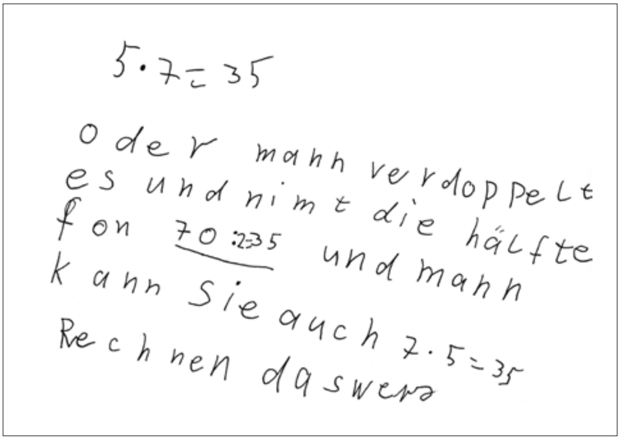

Abb. 2: Jonahs Lösung der Aufgabe 5 · 7

wird mit einem Zehner in Beziehung gesetzt. Jonah scheint (siehe Abb. 2) zunächst den Multiplikator zu verdoppeln (· 2) und anschließend das Ergebnis wieder zu halbieren (: 2).

Vergleicht man die Ideen der zwei Schüler, so stellt man auf der einen Seite fest, dass die den Mathematikunterricht spiegelnde Idee von Jonah im Sinne der fortschreitenden Schematisierung eine Weiterentwicklung der informell, offenbar im Vorfeld des zugehörigen Unterrichts gewonnenen Idee von Erik zu sein scheint: Mit Bezug auf das Dezimalsystem wird die Multiplikation mit dem Faktor „5" von der zusätzlichen „Last" befreit zu untersuchen, ob der 2. Faktor gerade oder ungerade ist; das Verfahren kann unabhängig von Überlegungen zur Parität des 2. Faktors generell angewandt werden. Auf der anderen Seite gewinnen aber beide Schüler gerade dann neue Erkenntnisse, wenn sie ihre Strategie in Bezug zur Strategie des anderen setzen können und erkennen, dass sie letztlich ähnlich, aber in anderer Reihenfolge der Verknüpfung von Multiplikation (Verzehnfachen) und Division (Halbieren) vorgegangen sind:

- Erik: die Aufgabe $5 \cdot 7$ ist ähnlich wie $6 \cdot 5$ und ergibt somit dasselbe Ergebnis wie die Rechnung $10 \cdot (6 : 2) + 5$.
- Jonah: die Aufgabe $5 \cdot 7$ muss dasselbe Ergebnis liefern wie die Rechnung $(10 \cdot 7) : 2$.

Kurz gesagt: Gelernt wird gerade dann, wenn die eigene Idee mit Blick auf eine andere, möglicherweise irritierende, aber gar nicht so fremde Idee neu gedeutet und erläutert wird. Wenn beiden Schülern im Unterricht deutlich wird, wie sie unterschiedlich in der Rechentechnik und doch zugleich ähnlich in der zugrunde liegenden mathematischen Struktur die Aufgabe bearbeiten, können sie ihre bisherigen mathematischen Einsichten im Hinblick auf neue strukturelle Beziehungen ausdifferenzieren.

In diesem Sinne geht es im Mathematikunterricht auch darum, mathematische Beziehungen zwischen Zahlen und Termen zu entwickeln, zu diskutieren und zu reflektieren. Denn der epistemologische Kern des arithmetischen Wissens besteht in flexiblen, inhaltlich bedeutsamen und in Zeichen und Symbolen darstellbaren Beziehungen zwischen Zahlen und Rechenoperationen.

Dieser Kern des mathematischen Wissens differenziert sich im Denken von Kindern gerade dann aus, wenn sie Gelegenheiten erfahren, neue mathematische Beziehungen zwischen mathematischen Objekten zu konstruieren. Solche, für das Mathematiklernen zentralen Prozesse der Neukonstruktion von mathematischem Wissen werden als „fundamentales Lernen“ bezeichnet (vgl. Steinbring 2000): Der Schüler Erik nutzt beispielsweise sein bereits gefestigtes Verständnis vom Halbieren, um dieses vor neuen Anforderungen weiter auszubauen und als neue Beziehung zwischen der Multiplikation mit 5 und der Multiplikation mit 10 vor dem Hintergrund der Bedeutung des Verzehnfachens im dezimalen Stellenwertsystem zu deuten, oder allgemeiner formuliert: Das alte Wissen des Schülers wird genutzt, in der Konfrontation mit neuen Anforderungen aber neu gedeutet. Letztlich führt es zu einer Erweiterung des alten Wissens um neue Beziehungen.

Aus epistemologischer Sicht sind solche fundamentalen Lernprozesse von zentralem Interesse für mathematikdidaktische Forschung; sie sind gleichermaßen in der Praxis schwierig zu initiieren, wie sie in der Theorie schwierig zu verstehen sind.

Konstruktive Mathematikdidaktik: Initiierung von Lernprozessen

Damit fundamentale Lernprozesse nicht einfach nur spontan und gewissermaßen „zufällig“ zustande kommen, entwirft die konstruktive Mathematikdidaktik anregende Lernumgebungen, mit denen Lehrkräfte in der Praxis bei der Gestaltung des Mathematikunterrichts unterstützt werden sollen. Die Konstruktion einer Lernumgebung ist von einer zentralen mathematischen Struktur geleitet, sodass die Kinder in ihren Aktivitäten mit Anforderungen konfrontiert werden, die das Entstehen von fundamentalen Lernprozessen begünstigen, aber naturgemäß keinesfalls garantieren können. Es wäre naiv zu glauben, dass man den Kindern durch die genügend sorgfältige Wahl eines anspruchsvollen Aufgabenformats oder durch den Einsatz methodisch ausgefeilter Arbeits- und Anschauungsmaterialien oder durch einen ausgefeilten kooperativen Methodenalgorithmus einen einfachen, einheitlichen und unmittelbaren Zugang zu den intendierten mathematischen Beziehungen liefern könnte. Vielmehr müssen diese von den Kindern erst noch im Kontext des Unterrichts, in der Auseinandersetzung mit Deutungen und Ideen der Lehrkraft und der Mitschüler konstruiert werden.

Denn derartige Lernumgebungen sind künstliche Objekte der Mathematikdidaktik (vgl. Steinbring 1999b), das heißt, sie entstammen weder direkt der außermathematischen Erfahrungswelt der Kinder, noch stellen sie das zu erlernende Wissen selbst dar; vielmehr fungieren sie als Vermittler zwischen Mathematik und Kindern, als potentielle Referenzkontexte, durch die den Kindern auf der Basis ihres bisherigen mathematischen Wissens die Eigenkonstruktion von neuem mathematischen Wissen ermöglicht werden soll. Die angebotenen Referenzkontexte müssen deshalb eine gewisse Flexibilität besitzen, mit anderen Worten: Die Produktion und Diskussion struktureller Zugänge zur Mathematik unterliegen stets dem prinzipiellen Problem, dass die Kinder aus ihrem routinemäßig verfügbaren Wissen heraus neue Sichtweisen auf die thematisierten Inhaltsbereiche entwickeln müssen, die letztlich über das bisher Gelernte hinausgehen:

> *„Unbedingt muss beachtet werden, dass mit einem künstlichen Objekt, mit einer mathematischen Lernumgebung, nicht ein für allemal die anfangs als Startpunkt implizit mitgelieferte exemplarische Deutung des mathematischen Wissens bestehen bleibt. Hier vollziehen sich Änderungen, Verallgemeinerungen und Abstraktionen des mathematischen Wissens.“* (Steinbring 1999b, S. 230)

Wie aber können die Lernenden Deutungen im real stattfindenden Unterrichtsprozess ausdifferenzieren, um in den mathematischen Zeichen und Symbolen neue Strukturen zu sehen, um letztlich ihr begriffliches Wissen weiterzuentwickeln? Für eine professionelle Unterstützung derartiger Lernprozesse erscheint es notwendig, sich mit den Beziehungen zwischen den fachspezifischen Eigenschaften mathematischen Wissens und den sozial-interaktiven Bedingungen des Lehrens und Lernens von Mathematik auseinanderzusetzen; denn die lernenden Kinder erfahren Mathematik so, wie sie im Unterricht thematisiert und entwickelt wird – ein Forschungsbereich der rekonstruktiven Mathematikdidaktik.

Rekonstruktive Mathematikdidaktik: Verstehen von Lernprozessen

Wenn mathematische Lehr- und Lernprozesse nachträglich zum Gegenstand reflektierender Analysen werden, wird schnell deutlich: Das Lehren und Lernen von Mathematik kann nicht einfach als direkte Form der „Vermittlung“ im Sinne einer Mitteilung des „fertigen“ Wissens von der mathematisch gebildeten Lehrperson an die noch unwissenden Kinder aufgefasst werden. Es realisiert sich vielmehr als komplexer, facettenreicher, sozial interaktiver Prozess, der stets neu zwischen Lehrperson und Schülern vermitteln muss und dadurch erst die Mathematik produziert, die für die Lehr-Lernprozesse zentral ist. Die Arbeiten der rekonstruktiven Mathematikdidaktik versuchen, solche mathematischen Wissenskonstruktionen im Kontext sozialer Lehr- und Lernprozesse theoretisch zu erklären. Dabei entwickeln sie neue Möglichkeiten für Lehrkräfte, ihren eigenen Unterricht professionell zu reflektieren und tiefgründiger zu verstehen. Sie geben Lehrkräften neue Mittel zur Diagnose und Analyse alltäglicher eigener Unterrichtsprozesse an die Hand. Gleichwohl liefern sie keine Patentrezepte für erfolgreichen Mathematikunterricht: Steinbring (1999b) weist darauf hin, dass der Frage, ob und wie Schüler in gegebenen Lernumgebungen und im Zuge von Deutungs- und Argumentationsprozessen eigenständig und aktiv mathematisches Wissen konstruieren und inwiefern dieses Wissen eine strukturelle Erweiterung des bereits bekannten Wissens darstellen kann, immer eingehender und immer wieder Aufmerksamkeit zu schenken ist.

Zu bedenken ist hierbei, dass die Möglichkeit, das eigene Wissen strukturell zu erweitern, letztlich ein lerntheoretisches Paradoxon darstellt: Auf der einen Seite müssen die Kinder ihr altes Wissen zunächst als Verstehensgrundlage für einen neuen Lernbereich heranziehen – anderes Wissen ist ihnen nicht verfügbar. Auf der anderen Seite kann diese Verstehensgrundlage nicht nur um zusätzliche Fakten ausgebaut werden, sie muss vielmehr ein Stück weit umstrukturiert werden, wenn fundamentales Lernen stattfinden soll (für eine detaillierte Diskussion siehe zum Beispiel Steinbring 2005, S. 65 ff.). An dieser Stelle sollen zwei zentrale Voraussetzungen für das Zustandekommen solcher Lernprozesse – wann und wie entstehen diese? – kurz diskutiert werden, die für zahlreiche Beiträge in diesem Buch prägend sind:

- *Dissens – sozial-interaktive Bedingungen:* Eine Veranlassung für eine Umstrukturierung des alten Wissens entsteht bei Lernenden insbesondere dann, *wenn* dieses Wissen irritiert wird. Wenn die Kinder eine gewisse Problemstellung allein durch ihr bislang entwickeltes Verständnis nicht bewältigen können, wenn eine Idee, eine Äußerung, eine Sichtweise eines Mitschülers nicht sofort verstanden und erklärt werden kann, dann kann das eigene Wissen erschüttert werden. Gerade in der sozialen Interaktion werden den Lernenden ihre unterschiedlichen Sichtweisen auf einen Lerngegenstand deutlich. Ein solcher (aufbrechender) Dissens über das Verstehen auf der sozial-interaktiven Ebene bietet das Potential für argumentative Verständigungsprozesse, in denen Koordinationsprobleme zutage treten und zu lösen versucht werden. Hierdurch kann ein Dissens im Verstehen erzeugt und zu lösen gesucht werden. Kurz gesagt: Es werden günstige sozial-interaktive Bedingungen für Wissenskonstruktionen im Sinne des fundamentalen Lernens geschaffen.
- *Mathematische Struktur – epistemologische Bedingungen:* Die epistemologischen Bedingungen des mathematischen Lernens zielen auf die Frage, *wie* Kinder ihr altes Wissen für eine neue Deutungsanforderung nutzbar machen können: Die hintergründigen mathematischen Konzepte eines Problems dürfen nicht so neu sein, dass den Kindern die Grundlage für einen ersten, rudimentären Zugang zum Lerngegenstand fehlt – dass ihnen der vertraute Ort fehlt, mit dem sie die neu in den Blick genommenen mathematischen Strukturen verbinden können. Nur eine gewisse Balance zwischen einer zum alten Wissen passenden „Faktenanreicherung" und der Konstruktion einer „das alte Wissen überschreitenden Deutung" ermöglicht es den Kindern, eine neuartige Beziehung im Sinne des fundamentalen Lernens zu konstruieren. Kurz gesagt: Das Problem muss epistemologisch gesehen für die Kinder zugänglich sein.

Verschiedene Perspektiven: Der Aufbau dieses Buches

Beide Perspektiven auf die Mathematikdidaktik – konstruktiv und rekonstruktiv – sind prägend für die Beiträge in diesem Buch. Sie stehen damit in der Forschungs- und Lehrtradition von Heinz Steinbring, der stets beide Perspektiven der Mathematikdidaktik miteinander verschränkt sieht. Steinbrings Forschungen zum mathematischen Wissen in sozialen Kontexten des Lehrens und Lernens in der Schule und Lehrerbildung stellen einen wesentlichen Beitrag zur wissenschaftlichen Grundlegung der Mathematikdidaktik dar. Die besonderen epistemologischen und sozial-interaktiven

Bedingungen und Charakteristika der „Natur des mathematischen Wissens in der Unterrichtspraxis" zeigt er thematisch vielfältig auf – etwa anhand des stochastischen und funktionalen Denkens in der Sekundarstufe und des arithmetischen Denkens in der Grundschule, des Umgangs mit Veranschaulichungsmitteln oder aber anhand kommunikativer und kultureller Blickwinkel auf Lehr-Lernprozesse. Konkrete Beispiele aus der realen Unterrichtspraxis präzisiert und charakterisiert er mit der Sicht und den Begriffen soziologischer und mathematisch-philosophischer Theorien.

Die aus der empirischen Forschung gewonnenen theoretischen Erkenntnisse sind auf der einen Seite international leitend für zahlreiche Kooperationsprojekte. Auf der anderen Seite steht die empirische Forschung stets lokal in enger Kooperation mit Lehrkräften aus der Schulpraxis. Dadurch entsteht eine Basis für die produktive Verschränkung von gleichermaßen theoriegeleiteten und -bildenden konstruktiven und rekonstruktiven Arbeitsweisen, die für die universitäre Ausbildung von Lehramtsstudierenden und für Lehrerfortbildungen zentral ist. Das Buch ist ein Spiegel dieser facettenreichen mathematikdidaktischen Forschungs- und Lehrtradition, an dem zahlreiche Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker aus dem Forschungsumfeld von Heinz Steinbring mitgewirkt haben. Besonderer Dank geht dabei an Kristin und Hanna Steinbring, die sich inhaltlich kompetent und sprachlich souverän der Übersetzung der englischsprachigen Beiträge angenommen haben.

Im eher theoriebezogenen Teil 1 finden sich ganz unterschiedliche – konstruktive wie rekonstruktive – Einblicke in mathematikdidaktische Ansätze. Sie werden vier epistemologisch orientierten Themenschwerpunkten in der Mathematikdidaktik zugeordnet: In Kapitel 1.1 werden besondere Aspekte der Entwicklung mathematischer Begriffe, die der Mathematik im Denken der Kinder eine Ordnung bieten, näher erörtert. Kapitel 1.2 diskutiert die Entwicklung und das Design von sowie vor allem auch den Umgang mit reichhaltigen Aufgabensystemen, die als Rahmen für die Unterstützung der Entwicklung mathematischer Begriffe im Denken der Kinder herangezogen werden können. Anschließend erörtert Kapitel 1.3 die besondere Funktion der Interaktion für die Weiterentwicklung und Ausdifferenzierung mathematischer Begriffe im Denken der Kinder. Kapitel 1.4 ergänzt die Analysen der mathematikdidaktischen Perspektiven um die Sichtweise der im Unterrichtsgeschehen involvierten Lehrkräfte, die alltägliche Unterrichtsszenen als Forum für die Entwicklung ihrer Fähigkeiten nutzen, mathematische Deutungsprozesse im Denken der Kinder zu sehen und anzuregen. Jedes dieser Kapitel beginnt mit einer kurzen, epistemologisch orientierten Einführung in den Themenbereich und wird ergänzt durch unterschiedliche Perspektiven renommierter Mathematikdidaktiker. Das thematisch breite Spektrum enthält Beispiele, die von der Grundschule bis zu Mathematikveranstaltungen für Lehrerinnen und Lehrer an der Hochschule reichen.

Teil 2 schärft die Bezüge zwischen theoriegeleiteten Rekonstruktionen und praxisnahen Vorschlägen für die Unterrichtsgestaltung. Hier finden sich unter verschiedenen Schwerpunkten diskutierte Unterrichtsvorschläge (Beispiele für geeignete Arbeitsaufträge finden sich stets am Ende eines thematischen Abschnitts sowie in den

Arbeitsblättern der Download-Materialien), deren Analysen über eine stoffdidaktische Betrachtung hinausgehen und zentrale Aspekte des Mathematiklernens aus rekonstruktiver Perspektive in den Blick nehmen. Ausgehend von konkreten Aufgaben für eine mathematikdidaktisch fundierte Gestaltung der Unterrichtspraxis werden anhand ausgewählter Episoden aus dem zugehörigen Unterricht theoretische Ansätze skizziert, die zur professionellen Reflexion mathematischer Lernprozesse wesentlich sind.

Hierbei geht es zunächst in Kapitel 2.1 um Möglichkeiten zur Diagnose von mathematischen Kompetenzen im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule – wie kann die Lehrkraft mathematische Denkprozesse von Kindern verstehen lernen? Kapitel 2.2 zeigt Chancen und Probleme bei der Initiierung und Begleitung diskursiver Auseinandersetzungen über mathematische Zusammenhänge auf – wie können interaktive Lernprozesse zwischen Kindern und mit den Kindern angeregt werden, damit die Schüler über die Mathematik ins Gespräch kommen? Die Komplexität bei Deutungsprozessen zu Anschauungsmitteln steht im Zentrum der folgenden Unterrichtsanregungen in Kapitel 2.3 – wie „mehr-deutig" sind mathematische Darstellungen und wie differenzieren Kinder über die Aushandlung von Sichtweisen ihre Deutung aus? Das abschließende Kapitel 2.4 widmet sich dem Feld der besonderen Förderung – wie können mathematisch besonders begabte Kinder im Rahmen (außer-)gewöhnlicher mathematischer Themen Angebote zur Vertiefung ihres mathematischen Denkens erhalten?

Das vorliegende Buch soll weniger Antworten auf die zahlreichen Fragen der Natur mathematischen Wissens und der Anregung mathematischer Lernprozesse liefern, es versteht sich vielmehr als Anregung zur forschenden mathematikdidaktischen Reflexion, als Ausgangspunkt für eigene Fragestellungen.