Lösung zu:
Michael Barth: Aufgaben zu Kreisbewegungen (S. 39 – 41)

Kontextorientierte Aufgaben zum Thema „Kreisbewegungen“: Lösungen

1. Wasser im rotierenden Eimer

a) Typischer 5-l-Eimer: Durchmesser 20 cm, 16 cm unten, Höhe 21 cm, Masse ca. 185 g. Modelliert als Zylinder mit Durchmesser 18 cm. Es stehen 2 l Wasser im Eimer ca. 8,4 cm hoch. Armlänge: ca. 70 cm, Radius Eimerbügel: 10 cm, also Radius der Wasseroberfläche ca. 93 cm und Eimerboden ca. 101 cm.

Im oberen Punkt der Bahn läuft das Wasser gerade dann nicht aus, wenn seine Gewichtskraft die Zentripetalkraft für die Kreisbewegung ist (oder kleiner als diese). Damit das Wasser garantiert nicht ausläuft, nehmen wir r = 93 cm.

$F_Z = mg \rightarrow m\omega^2 r = mg \rightarrow \omega = \sqrt{g/r} \approx 3{,}25$ Hz $\rightarrow f \approx 0{,}52$ Hz $\rightarrow$ Eine Drehung kann also maximal 2 s dauern: Das ist unrealistisch (s. dazu Lösung d).

Die Masse kürzt sich heraus, hat also keinen Einfluss.

b) Im höchsten Punkt ist wegen $F_Z = mg$ keine Haltekraft erforderlich. Das Wasser fällt also gerade so herunter, dass es auf der Kreisbahn bleibt, man braucht selbst also für nichts sorgen. Real tut man dies auch nicht, schon sicherheitshalber, aber gering ist die Haltekraft dort schon. Siehe aber auch die Lösung zu d)

c) Am tiefsten Punkt ist bei konstanter Drehfrequenz $F_Z = mg$. Hinzu kommt die Gewichtskraft, also ist die Haltekraft $F_H = 2mg \approx 43$ N ($m \approx 2{,}2$ kg, s. Lösung zu a).

Reichen würde dort auch $F_Z = 0$; die Schwerkraft hält das Wasser im Eimer. Allerdings führte dies zu $f = 0$ – ein unsinniger Wert, weil der Eimer dafür in Ruhe sein müsste. Aber geringer als unter b) könnte man f durchaus wählen. Real tut man dies jedoch nicht, da man im Gegenteil die Beschleunigung des vorher fallenden Eimers nutzt, um ihn leichter wieder in den ansteigenden Halbkreis zu bewegen.

d) 2 s für eine Umdrehung (s. Lösung zu a) widersprechen den Erfahrungen im Experiment völlig. Der Grund: Man muss auch dafür sorgen, dass kein Wasser an den anderen Bahnpunkten ausläuft. Und da dort der Vektor der Gewichtskraft und der Zentripetalkraft (sie sorgt dafür, dass der Boden des Eimers auf der Kreisbahn bleibt) schräg zueinander stehen, muss F_Z größer als mg gewählt werden. Man muss also eine so hohe Frequenz wählen, dass das Wasser dort nicht ausläuft, d. h. nicht bis zum Eimerrand kommt. Modellieren lässt sich das mit unseren Mitteln nicht, da das Waser sich ja verformt. Aber intuitiv schafft man das gut, jedoch mit deutlich höherer Drehfrequenz.

2. Wie schafft man es durch den Looping?

a) Geschwindigkeit in B: $F_Z = mg \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$,
$v_B = \omega r = \sqrt{rg} \Rightarrow v_B \approx 1$ m/s.
Geschwindigkeit in C: $W_{kin} = ½ m v_B^2 + mg \cdot 2r = ½ m v_C^2 \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 + 4gr} \approx 2{,}2$ m/s.
Um v_B zu garantieren: W_{pot} in A = W_{kin} in B.
$mg \cdot (h - 2r) = ½ m v_B^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2g} v_B^2 + 2r \approx 0{,}25$ m.

b) Kugel: Durchmesser: 1 cm/2 cm; Stahl (7,85 g/cm³); V = 0,52 cm³/4,3 cm³; m = 4,1 g/32,9 g; $J = \frac{2}{5} mr^2 \approx 4{,}1 \cdot 10^{-8}$ kgm²/$1{,}3 \cdot 10^{-6}$ kgm².
$v_{max} = 2{,}2$ m/s $\Rightarrow \omega = v/r \approx 440$ Hz/220 Hz
$\Rightarrow W_{rot} = ½ J\omega^2 \approx 4 \cdot 10^{-3}$ J/ $31 \cdot 10^{-3}$ J.
Vergleich: $h = 0{,}25$ m $\Rightarrow W_{ges} \approx 0{,}01$ J = $10 \cdot 10^{-3}$ J.
Um W_{rot} zusätzlich aufzubringen, musste $mg\Delta h = 4 \cdot 10^{-3}$ J/ $31 \cdot 10^{-3}$ J sein, also Δh = 10 cm/9,6 cm, h_{ges} = 35 cm/34,6 cm, also *weniger* für die große Kugel.
Da der Schwerpunkt der Kugel in B tiefer liegt, verringert sich h noch um 0,5 cm/1 cm: h = 34,5 cm/33,6 cm.

3. Künstliche Gravitation durch Rotation

a) $\omega^2 r = g \Rightarrow \omega \approx 0{,}31$ Hz $\Rightarrow T \approx 20$ s (s. a. Teil b).
$r = 100$ m $\Rightarrow v \approx 31{,}3$ m/s = 113 km/h;
„wie schnell“: ω (oder v).
Begründung mit Gegenkraft auf die Füße zu F_Z (F_Z vom Boden aufgebracht) oder im *rotierenden System* mit Zentrifugalkraft (je nach Unterricht). „Unten“ ist in Radiusrichtung nach außen. Der Kopf befindet sich in einem Bereich mit kleinerem a_Z, bei 180 cm Körpergröße wirkt am Kopf nur ca. 98 % von g. Die Masse hat keinen Einfluss.

b) 20 s. ist durchaus recht hoch, aber man könnte moderat über längere Zeit steigern. Ob der Blick aus dem Fenster auszuhalten ist? Das Andocken von Versorgungsschiffen wäre sicher nicht einfach.

c) Nach a) haben die Beine 13,3 m/s, der Kopf ca. 30,7 m/s. In Ruhe fällt diese Differenz nicht auf. Richtet man sicher aber aus der Hocke auf, bewegt sich der Kopf seitlich, was man spüren könnte. Bei radialer Bewegung passiert dies ebenso: „Klettern“ wäre gegen die Schwerkraft, aber diese nimmt in Richtung Zentrum ab. Also erscheint hier es hier nicht ganz angemessen, von „Klettern“ zu sprechen.

4. Trockenschleudern

a) 1400 Upm = 1400 1/min ≈ 23,3 Hz.
$F_Z = 0{,}001\ \text{kg} \cdot (2\pi \cdot 23{,}3\ \text{Hz})^2 \cdot r \approx 21{,}4\ (\text{N/m}) \cdot r$. Am Trommelrand sind das ca. 5,4 N, Dort ist F_Z am größten und vermutlich werden dort mehr Tropfen abgezogen.

b) Die Tropfen brauchen Zeit, um durch das Gewebe zu wandern; dies ist jedoch keine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, da $F_Z = F_Z(r)$. Das Gewebe hat Einfluss auf die Haltekraft, ebenso die Art der Flüssigkeit.

c) Die Kraft auf einen Tropfen am Trommelrand beim Schleudern (s. o.) ist erheblich größer als die Gewichtskraft des Tropfens. Aufhängen kann also kein Ersatz für das Schleudern sein.

5. Spiralbahn um den Finger

a) Konstantes ω führt nach $\omega = v/r$ mit sinkendem r zu steigendem v: Für kleinere r passt auch F_Z noch zu v.
Vgl.: $W_{rot} = J\omega^2 = \tfrac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} m r^2 \cdot (v^2/r^2) = \tfrac{1}{2} m v^2 = W_{kin}$ – unabhängig von r.

b) Hier ist v zwar fest vorgegeben, was aber ohne Reibungseinflüsse wiederum ein zugehöriges, festes ω impliziert (s. o.).
Mit Reibungseinfluss wird v (und damit ω) allerdings absinken, wobei schließlich ein Punkt erreicht wird, ab dem keine Kreisbahn mehr möglich ist, d. h., ab dem F_Z nicht mehr für die Fadenspannung ausreicht.

6. Reifen beim Rotieren

a) 50 km/h ≈ 13,9 m/s; 0,55 m/0,63 m
$\Rightarrow U \approx 1{,}73$ m/1,98 m
$f \approx 8{,}03$ Hz/7,02 Hz; $F_Z = m\omega^2 r \approx 699$ m/612 m $\Rightarrow$ 71 mg $\Rightarrow$ 71 g/62 g Beschleunigung. Der größere Reifen hat größeres F_Z.

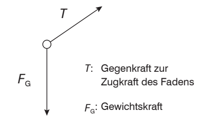
b) … wenn die Zentripetalkraft nicht ausreicht, den Reifen zusammenzuhalten.

c) In der vollständigen Reifenkennung (245/45 R 17 99 **H**) gibt es den Geschwindigkeitsindex H, der einen Bereich dafür vorgibt.

d) Der Reifendurchmesser muss konstant bleiben, damit das Tachometer korrekt anzeigt bzw. die vorgegebene Höchstgeschwindigkeit sich nicht ändert.

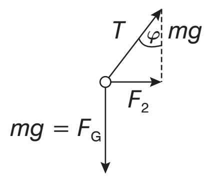
7. Rotationspendel

a)



b) Da der Ball beschleunigt ist (wg. a_r), kann das nicht zutreffen.

c)



$\sin\varphi = F_Z/T$, $\cos\varphi = mg/T \Rightarrow F_Z/(\sin\varphi) = mg/(\cos\varphi)$
$\Rightarrow F_Z = mg\tan\varphi \Rightarrow v = \sqrt{g\, r \cdot \tan\varphi} \approx 1{,}36$ m/s.

c) Mit $r = l \cdot \sin\varphi$ und $v = \sqrt{g\ l\ \sin\varphi\ \tan\varphi} \approx 1{,}36$ m/s folgt $l \approx 0{,}65$ m. Dabei hängt die Formel nur noch von einer Variablen φ ab, da l = konst.

d) Wenn v steigt, wird $\sqrt{r\tan\varphi}$ größer.